数学演習（複素数平面）R２．１．２９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1 点 A $(2+i)$，B $(-1-2i)$，C (3)，D $(-2i)$ を複素数平面上に図示せよ。

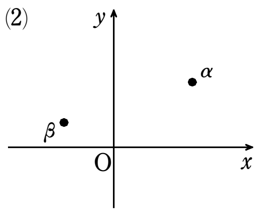
2 (1) $\alpha=a+2i$，$\beta=-2-4i$，$\gamma=3+bi$ とする。4 点 0，α，β，γ が一直線上にあるとき，実数 a，b の値を求めよ。

(2) 右図の複素数平面上の点 α，β について，次の点を図に示せ。

（ア） $\alpha+\beta$　　　（イ） $\alpha-\beta$

（ウ） $\alpha+2\beta$　　　（エ） $-(\alpha+2\beta)$

(2)



3 (1) $\alpha\overline{\beta}$ が実数でないとき，次の複素数は実数，純虚数のどちらであるか。

（ア） $\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$　　　（イ） $\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$

(2) a，b，c $(a\neq0)$ は実数とする。5 次方程式 $ax^5+bx^2+c=0$ が虚数解 α をもつとき，$\overline{\alpha}$ もこの方程式の解であることを示せ。

4 (1) $z=1+i$ のとき，$\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$ の値を求めよ。

(2) 2 点 A $(-1+5i)$，B $(3+2i)$ 間の距離は ア $\boxed{}$ である。また，この 2 点から等距離にある虚軸上の点 C を表す複素数は イ $\boxed{}$ である。

5 z，α，β を複素数とする。

(1) $|z-3|=|z+3i|$ のとき，等式 $z+i\overline{z}=0$ が成り立つことを示せ。

(2) $|\alpha|=|\beta|=|\alpha-\beta|=2$ のとき，$|\alpha+\beta|$ の値を求めよ。

6 z，α，β を複素数とする。

(1) $|z-2i|=|1+2iz|$ のとき，$|z|=1$ であることを示せ。

(2) $|\alpha|=|\beta|=|\alpha+\beta|=2$ のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ の値を求めよ。

$\boxed{7}$ 絶対値が 1 で，$\dfrac{z+1}{z^2}$ が実数であるような複素数 z を求めよ。

$\boxed{8}$ $z=a+bi$（a，b は実数）とするとき，次の式を z と $\overline{z}$ を用いて表せ。

(1) a (2) b (3) $a-b$ (4) a^2-b^2

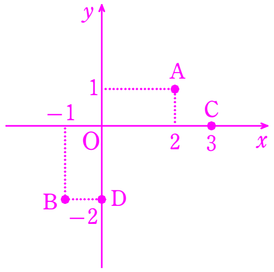
$\boxed{9}$ $\left(\alpha+\dfrac{1}{\overline{\alpha}}\right)\left(\overline{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}\right)=4$ であるとき，複素数 α の絶対値 $|\alpha|$ を求めよ。

$\boxed{10}$ α，z は複素数で，$|\alpha|>1$ であるとする。このとき，$|z-\alpha|$ と $|\overline{\alpha}z-1|$ の大小を比較せよ。

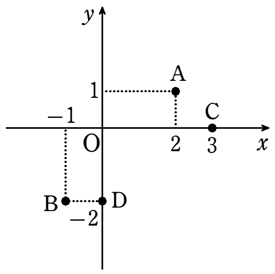
$\boxed{11}$ α を複素数とする。等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。

1 点 A$(2+i)$，B$(-1-2i)$，C(3)，D$(-2i)$ を複素数平面上に図示せよ。

解答 ［図］



解説

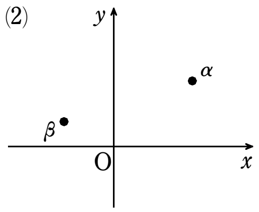


2 (1) $\alpha=a+2i$，$\beta=-2-4i$，$\gamma=3+bi$ とする。4 点 0，α，β，γ が一直線上にあるとき，実数 a，b の値を求めよ。

(2) 右図の複素数平面上の点 α，β について，次の点を図に示せ。

（ア） $\alpha+\beta$　　（イ） $\alpha-\beta$

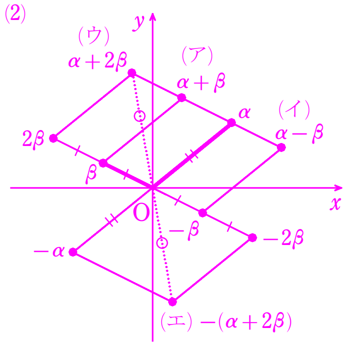
（ウ） $\alpha+2\beta$　　（エ） $-(\alpha+2\beta)$

(2)


解答 (1) $a=1$，$b=6$

(2) （ア）［図］　（イ）［図］

（ウ）［図］　（エ）［図］

(2)


解説

(1) $\alpha\neq0$ であるから，条件より　$\beta=k\alpha$ ……①，$\gamma=l\alpha$ ……②

となる実数 k，l がある。

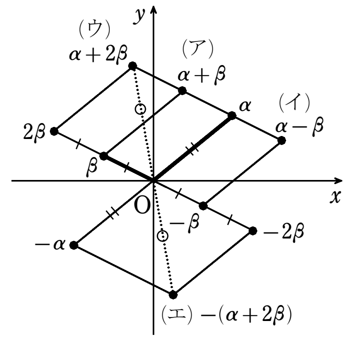
① から　$-2-4i=ka+2ki$　　よって　$-2=ka$，$-4=2k$

これを解いて　$k=-2$，$a=1$

② から　$3+bi=l+2li$　　ゆえに　$3=l$，$b=2l$

これを解いて　$l=3$，$b=6$

(2) 右の図で，線分で囲まれた四角形はすべて平行四辺形である。このとき，（ア）〜（エ）の各点は，図のようになる。



3 (1) $\alpha\overline{\beta}$ が実数でないとき，次の複素数は実数，純虚数のどちらであるか。

（ア） $\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$　　（イ） $\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$

(2) a，b，c $(a\neq0)$ は実数とする。5 次方程式 $ax^5+bx^2+c=0$ が虚数解 α をもつとき，$\overline{\alpha}$ もこの方程式の解であることを示せ。

解答 (1) （ア） 実数　（イ） 純虚数　(2) 略

解説

(1) （ア） $z=\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$ とすると

$$\overline{z}=\overline{\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta}=\overline{\alpha\overline{\beta}}+\overline{\overline{\alpha}\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\overline{\beta}}+\overline{\overline{\alpha}}\,\overline{\beta}=\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}=z$$

したがって，z は実数である。

（イ） $z=\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$ とすると

$$\overline{z}=\overline{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\overline{\beta}}-\overline{\overline{\alpha}}\,\overline{\beta}=\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}=-(\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta)=-z$$

また，$\alpha\overline{\beta}$ は実数でないから　$\overline{\alpha\overline{\beta}}\neq\alpha\overline{\beta}$　すなわち　$\overline{\alpha}\beta\neq\alpha\overline{\beta}$

よって　$\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta\neq0$　すなわち　$z\neq0$

したがって，z は純虚数である。

別解 $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$（a，b，c，d は実数）とすると

$\alpha\overline{\beta}=(a+bi)(c-di)=ac+bd+(-ad+bc)i$ ……①

$\overline{\alpha}\beta=(a-bi)(c+di)=ac+bd+(ad-bc)i$ ……②

（ア） ①＋② から　$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=2(ac+bd)$　　よって，$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$ は実数である。

（イ） ①−② から　$\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta=2(bc-ad)i$

$\alpha\overline{\beta}$ は実数ではないから，① より　$bc-ad\neq0$

よって，$\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$ は純虚数である。

(2) 5 次方程式 $ax^5+bx^2+c=0$ が $x=\alpha$ を解にもつから　$a\alpha^5+b\alpha^2+c=0$

ゆえに　$\overline{a\alpha^5+b\alpha^2+c}=\overline{0}$　すなわち　$\overline{a\alpha^5}+\overline{b\alpha^2}+c=0$

ここで，$\overline{a\alpha^5}=\overline{a}\,\overline{\alpha^5}=a(\overline{\alpha})^5$，$\overline{b\alpha^2}=\overline{b}\,\overline{\alpha^2}=b(\overline{\alpha})^2$ であるから

$a(\overline{\alpha})^5+b(\overline{\alpha})^2+c=0$

したがって，与えられた方程式は $x=\overline{\alpha}$ を解にもつ。

4 (1) $z=1+i$ のとき，$\left|z+\frac{1}{\overline{z}}\right|$ の値を求めよ。

(2) 2 点 A$(-1+5i)$，B$(3+2i)$ 間の距離は ア$\boxed{}$ である。また，この 2 点から等距離にある虚軸上の点 C を表す複素数は イ$\boxed{}$ である。

解答 (1) $\frac{3}{\sqrt{2}}$　(2) （ア） 5　（イ） $\frac{13}{6}i$

解説

(1) $\left|z+\frac{1}{\overline{z}}\right|^2=\left(z+\frac{1}{\overline{z}}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{\overline{z}}\right)}=\left(z+\frac{1}{\overline{z}}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{z}\right)$

$=z\overline{z}+\frac{1}{z\overline{z}}+2=|z|^2+\frac{1}{|z|^2}+2$

ここで，$|z|^2=|1+i|^2=1^2+1^2=2$ であるから

$\left|z+\frac{1}{\overline{z}}\right|^2=2+\frac{1}{2}+2=\frac{9}{2}$　　よって　$\left|z+\frac{1}{\overline{z}}\right|=\frac{3}{\sqrt{2}}$

別解 $|z|^2=2$ であるから　$z\overline{z}=2$　　よって　$\frac{1}{\overline{z}}=\frac{z}{2}$

ゆえに　$\left|z+\frac{1}{\overline{z}}\right|=\left|z+\frac{z}{2}\right|=\frac{3}{2}|z|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(2) $AB^2=|(3+2i)-(-1+5i)|^2=|4-3i|^2=4^2+(-3)^2=25$

$AB>0$ であるから　AB＝ア5

また，求める虚軸上の点を C(α) とすると，$\alpha=bi$（b は実数）とおける。

AC＝BC であるから　$AC^2=BC^2$

$AC^2=|1+(b-5)i|^2=1^2+(b-5)^2=b^2-10b+26$

$BC^2=|-3+(b-2)i|^2=(-3)^2+(b-2)^2=b^2-4b+13$

よって　$b^2-10b+26=b^2-4b+13$　　これを解いて　$b=\frac{13}{6}$

ゆえに，点 C を表す複素数は　イ$\frac{13}{6}i$

5 z，α，β を複素数とする。

(1) $|z-3|=|z+3i|$ のとき，等式 $z+i\overline{z}=0$ が成り立つことを示せ。

(2) $|\alpha|=|\beta|=|\alpha-\beta|=2$ のとき，$|\alpha+\beta|$ の値を求めよ。

解答 (1) 略　(2) $2\sqrt{3}$

解説

(1) $|z-3|=|z+3i|$ から　$|z-3|^2=|z+3i|^2$

ゆえに　$(z-3)\overline{(z-3)}=(z+3i)\overline{(z+3i)}$

よって　$(z-3)(\overline{z}-3)=(z+3i)(\overline{z}-3i)$

展開すると　$z\overline{z}-3z-3\overline{z}+9=z\overline{z}-3iz+3i\overline{z}+9$

整理すると　$(1-i)z=-(1+i)\overline{z}$

ゆえに　$z=-\frac{1+i}{1-i}\overline{z}=-\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\overline{z}=-\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\overline{z}=-\frac{2i}{2}\overline{z}$

$=-i\overline{z}$

したがって　$z+i\overline{z}=0$

(2) $|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\beta)}=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})=\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}$

$=|\alpha|^2-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+|\beta|^2$

条件より，$|\alpha|^2=|\beta|^2=|\alpha-\beta|^2=4$ であるから　$4=4-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+4$

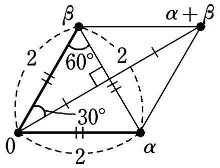
ゆえに　$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=4$

よって　$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)}=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})=\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}$

$=|\alpha|^2+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+|\beta|^2=4+4+4=12$

したがって　$|\alpha+\beta|=2\sqrt{3}$

別解　$|\alpha|=|\beta|=|\alpha-\beta|=2$ から，複素数平面上の 3 点 0，α，β は 1 辺の長さが 2 の正三角形をなす。
図から　$|\alpha+\beta|=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$



6 z，α，β を複素数とする。
(1)　$|z-2i|=|1+2iz|$ のとき，$|z|=1$ であることを示せ。
(2)　$|\alpha|=|\beta|=|\alpha+\beta|=2$ のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ の値を求めよ。

解答　(1)　略　　(2)　0

解説
(1)　$|z-2i|=|1+2iz|$ から　$|z-2i|^2=|1+2iz|^2$
ゆえに　$(z-2i)\overline{(z-2i)}=(1+2iz)\overline{(1+2iz)}$
よって　$(z-2i)(\overline{z}+2i)=(1+2iz)(1-2i\overline{z})$
展開すると　$z\overline{z}+2iz-2i\overline{z}+4=1-2i\overline{z}+2iz+4z\overline{z}$
整理すると　$3z\overline{z}-3=0$　　よって　$z\overline{z}=1$
したがって，$|z|^2=1$ であるから　$|z|=1$
(2)　$|\alpha|=|\beta|=2$ から　$|\alpha|^2=|\beta|^2=4$　　ゆえに　$\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=4$
よって　$\overline{\alpha}=\dfrac{4}{\alpha}$，$\overline{\beta}=\dfrac{4}{\beta}$　……①
また，$|\alpha+\beta|=2$ から　$|\alpha+\beta|^2=4$　　ゆえに　$(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})=4$
① を代入して　$(\alpha+\beta)\left(\dfrac{4}{\alpha}+\dfrac{4}{\beta}\right)=4$　　よって　$(\alpha+\beta)\cdot\dfrac{4(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=4$
ゆえに　$(\alpha+\beta)^2=\alpha\beta$　　したがって　$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$

7 絶対値が 1 で，$\dfrac{z+1}{z^2}$ が実数であるような複素数 z を求めよ。

解答　$z=\pm1$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

解説
$\dfrac{z+1}{z^2}$ が実数であるための条件は　$\overline{\left(\dfrac{z+1}{z^2}\right)}=\dfrac{z+1}{z^2}$
すなわち　$\dfrac{\overline{z}+1}{(\overline{z})^2}=\dfrac{z+1}{z^2}$　……[A]
両辺に $z^2(\overline{z})^2$ を掛けて　$z^2(\overline{z}+1)=(\overline{z})^2(z+1)$
よって　$z\cdot z\overline{z}+z^2=\overline{z}\cdot z\overline{z}+(\overline{z})^2$
$|z|=1$ より $z\overline{z}=1$ であるから　$z+z^2=\overline{z}+(\overline{z})^2$
ゆえに　$z-\overline{z}+z^2-(\overline{z})^2=0$
よって　$(z-\overline{z})(1+z+\overline{z})=0$
ゆえに　$z-\overline{z}=0$　または　$1+z+\overline{z}=0$
[1]　$z-\overline{z}=0$ のとき　$\overline{z}=z$
よって，z は実数であるから，$|z|=1$ より　$z=\pm1$
[2]　$1+z+\overline{z}=0$ のとき　$z+\overline{z}=-1$
また，$z\overline{z}=1$ であるから，z，$\overline{z}$ は 2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の解である。
この方程式を解くと　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

[1]，[2] から　$z=\pm1$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

別解　$z\overline{z}=1$ から　$\dfrac{1}{\overline{z}}=z$　　よって　$\dfrac{\overline{z}+1}{(\overline{z})^2}=\dfrac{1}{\overline{z}}+\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)^2=z+z^2$
ゆえに，[A] は　$z+z^2=\dfrac{z+1}{z^2}$　　両辺に z^2 を掛けて　$z^2\cdot z(z+1)=z+1$
よって　$(z+1)(z-1)(z^2+z+1)=0$
これを解いて　$z=\pm1$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

8 $z=a+bi$（a，b は実数）とするとき，次の式を z と $\overline{z}$ を用いて表せ。
(1)　a　　(2)　b　　(3)　$a-b$　　(4)　a^2-b^2

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2}\overline{z}$　　(2)　$-\dfrac{1}{2}iz+\dfrac{1}{2}i\overline{z}$　　(3)　$\dfrac{1}{2}(1+i)z+\dfrac{1}{2}(1-i)\overline{z}$
(4)　$\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{1}{2}(\overline{z})^2$

解説
$z=a+bi$ のとき　$\overline{z}=a-bi$
(1)　$z+\overline{z}=2a$ であるから　$a=\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2}\overline{z}$
(2)　$z-\overline{z}=2bi$ であるから
$b=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=-\dfrac{i(z-\overline{z})}{2}=-\dfrac{1}{2}iz+\dfrac{1}{2}i\overline{z}$
(3)　(1)，(2) から
$a-b=\left(\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2}\overline{z}\right)-\left(-\dfrac{1}{2}iz+\dfrac{1}{2}i\overline{z}\right)$
$=\dfrac{1}{2}(1+i)z+\dfrac{1}{2}(1-i)\overline{z}$
(4)　$z^2=a^2+2abi-b^2$　……①
$(\overline{z})^2=a^2-2abi-b^2$　……②
①＋② から　$z^2+(\overline{z})^2=2(a^2-b^2)$
したがって　$a^2-b^2=\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{1}{2}(\overline{z})^2$

9 $\left(\alpha+\dfrac{1}{\overline{\alpha}}\right)\left(\overline{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}\right)=4$ であるとき，複素数 α の絶対値 $|\alpha|$ を求めよ。

解答　$|\alpha|=1$

解説
$\left(\alpha+\dfrac{1}{\overline{\alpha}}\right)\left(\overline{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}\right)=\alpha\overline{\alpha}+\alpha\cdot\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\overline{\alpha}}\cdot\overline{\alpha}+\dfrac{1}{\overline{\alpha}\alpha}=|\alpha|^2+\dfrac{1}{|\alpha|^2}+2$
よって　$|\alpha|^2+\dfrac{1}{|\alpha|^2}+2=4$　　すなわち　$|\alpha|^2+\dfrac{1}{|\alpha|^2}=2$
$|\alpha|^2=t$ とおくと　$t+\dfrac{1}{t}=2$　　両辺に t を掛けて　$t^2+1=2t$
よって　$t^2-2t+1=0$　　すなわち　$(t-1)^2=0$　　ゆえに　$t=1$
すなわち　$|\alpha|^2=1$　　よって　$|\alpha|=1$

10 α，z は複素数で，$|\alpha|>1$ であるとする。このとき，$|z-\alpha|$ と $|\overline{\alpha}z-1|$ の大小を比較せよ。

解答　$|z|>1$ のとき $|z-\alpha|<|\overline{\alpha}z-1|$，$|z|=1$ のとき $|z-\alpha|=|\overline{\alpha}z-1|$，
$|z|<1$ のとき $|z-\alpha|>|\overline{\alpha}z-1|$

解説
$|z-\alpha|^2-|\overline{\alpha}z-1|^2=(z-\alpha)\overline{(z-\alpha)}-(\overline{\alpha}z-1)\overline{(\overline{\alpha}z-1)}$
$=(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})-(\overline{\alpha}z-1)(\alpha\overline{z}-1)$
$=|z|^2-z\overline{\alpha}-\alpha\overline{z}+|\alpha|^2-(|\alpha|^2|z|^2-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+1)$
$=|z|^2+|\alpha|^2-|\alpha|^2|z|^2-1=|z|^2(1-|\alpha|^2)-(1-|\alpha|^2)$
$=(1-|\alpha|^2)(|z|^2-1)$
$|\alpha|>1$ であるから　$|\alpha|^2>1$　　ゆえに　$1-|\alpha|^2<0$
よって，$|z|>1$ のとき　$|z-\alpha|^2-|\overline{\alpha}z-1|^2<0$　すなわち　$|z-\alpha|<|\overline{\alpha}z-1|$
$|z|=1$ のとき　$|z-\alpha|^2-|\overline{\alpha}z-1|^2=0$　すなわち　$|z-\alpha|=|\overline{\alpha}z-1|$
$|z|<1$ のとき　$|z-\alpha|^2-|\overline{\alpha}z-1|^2>0$　すなわち　$|z-\alpha|>|\overline{\alpha}z-1|$

11 α を複素数とする。等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。

解答　$\alpha=0$ のとき $z=0$；$\alpha\neq0$ のとき $z=-2\overline{\alpha}i$，$-\dfrac{1}{\alpha}i$

解説
$2|\alpha|^2+1>0$ であるから，等式より　$\overline{z}=-\dfrac{\alpha(|z|^2+2)}{i(2|\alpha|^2+1)}=\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1}\alpha i$
ゆえに　$z=-\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1}\overline{\alpha}i$　……①
$-\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1}$ は負の実数であるから，$-\dfrac{|z|^2+2}{2|\alpha|^2+1}=k$ とおくと　$z=k\overline{\alpha}i$　……②
よって　$|z|^2=z\overline{z}=k\overline{\alpha}i\cdot(-k\alpha i)=|\alpha|^2k^2$　……③
②，③ を ① に代入して　$k\overline{\alpha}i=-\dfrac{|\alpha|^2k^2+2}{2|\alpha|^2+1}\overline{\alpha}i$
ゆえに　$(2|\alpha|^2+1)k\overline{\alpha}=-(|\alpha|^2k^2+2)\overline{\alpha}$
すなわち　$\{|\alpha|^2k^2+(2|\alpha|^2+1)k+2\}\overline{\alpha}=0$
よって　$\alpha=0$　または　$|\alpha|^2k^2+(2|\alpha|^2+1)k+2=0$
[1]　$\alpha=0$ のとき，① から　$z=0$
[2]　$\alpha\neq0$ のとき，$|\alpha|^2k^2+(2|\alpha|^2+1)k+2=0$ の左辺を変形すると
$(k+2)(|\alpha|^2k+1)=0$
ゆえに　$k=-2$，$-\dfrac{1}{|\alpha|^2}$（$k<0$ を満たす。）
② から　$k=-2$ のとき　$z=-2\overline{\alpha}i$
$k=-\dfrac{1}{|\alpha|^2}$ のとき　$z=-\dfrac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}i=-\dfrac{1}{\alpha}i$
[1]，[2] から，求める z は　$\alpha=0$ のとき　$z=0$，$\alpha\neq0$ のとき　$z=-2\overline{\alpha}i$，$-\dfrac{1}{\alpha}i$