統一テスト（複素数平面･式と曲線）R１．６．１８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 複素数 α について，$|\alpha|=1$ のとき，$\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}$ は実数であることを証明せよ。

$\boxed{2}$ 2 つの複素数 $\alpha=1-\sqrt{3}\,i$，$\beta=\sqrt{3}+i$ について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$\boxed{3}$ $\alpha=-1+2i$，$\beta=3-i$ について，点 β を，点 α を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点 γ を表す複素数を求めよ。

$\boxed{4}$ $\alpha=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ とする。α^n が実数となるような最小の正の整数 n を求めよ。

$\boxed{5}$ 極座標に関して，点 $\left(2,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ を通り，始線に平行な直線の極方程式を求めよ。

$\boxed{6}$ 円 $(x+2)^2+y^2=1$ に外接し，直線 $x=1$ に接する円 C の中心を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。点 P の軌跡はどのような曲線になるか。

$\boxed{7}$ 2 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を焦点とし，2 直線 $y=\sqrt{3}\,x$，$y=-\sqrt{3}\,x$ を漸近線とする双曲線の方程式を求めよ。

$\boxed{8}$ 複素数 α , β が $|\alpha|=1$, $|\beta|=\sqrt{2}$, $|\alpha-\beta|=1$ を満たし，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の虚部は正であるとする。このとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求めよ。

$\boxed{9}$ 方程式 $z^4=-1$ を解け。

$\boxed{10}$ $z+\dfrac{1}{z}$ が実数となる複素数 z が表す複素数平面上の点全体は，どのような図形を表すか。

$\boxed{11}$ 点 $(0\,,1)$ を通り，双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ と共有点を 1 つしかもたない直線のうち，傾きが負である直線の方程式を求めよ。

$\boxed{12}$ 点 $(-3\,,1)$ を通り，楕円 $x^2+\dfrac{(y-1)^2}{2}=1$ に接する直線の方程式を求めよ。

$\boxed{13}$ 次の式で表される点 P $(x,\ y)$ は，どのような曲線を描くか。　$x=\dfrac{2t}{1-t^2}$，$y=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$

$\boxed{14}$ 複素数 z が等式 $|2iz+6|=|z-3|$ を満たすとき，$|z|$ の最小値を求めよ。ただし，i は虚数単位である。

$\boxed{1}$ 複素数 α について，$|\alpha|=1$ のとき，$\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}$ は実数であることを証明せよ。 6

解答 略

$|\alpha|=1$ のとき，$|\alpha|^2=1$ であるから　$\alpha\overline{\alpha}=1$　すなわち　$\dfrac{1}{\alpha}=\overline{\alpha}$

よって　$\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}=\alpha^3+\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^3=\alpha^3+(\overline{\alpha})^3=\alpha^3+\overline{\alpha^3}$ ← $z+\overline{z}$ の形が大切!

$\alpha^3+\overline{\alpha^3}$ は実数であるから，$\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}$ は実数である。

$\boxed{2}$ 2つの複素数 $\alpha=1-\sqrt{3}i$，$\beta=\sqrt{3}+i$ について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

・先に極形式にする
・偏角に注意。

解答 $\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の順に　$4\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$，$\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi$　各4

$\alpha=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$

$\beta=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

よって

$\alpha\beta=4\left\{\cos\left(\dfrac{5}{3}\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{5}{3}\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}=4\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2}{2}\left\{\cos\left(\dfrac{5}{3}\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{5}{3}\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}=\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi$

$\boxed{3}$ $\alpha=-1+2i$，$\beta=3-i$ について，点 β を，点 α を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点 γ を表す複素数を求めよ。

解答 $\gamma=2+6i$　6

点 α が原点Oに移るような平行移動で，点 β，γ がそれぞれ点 β'，γ' に移るとすると

$\beta'=\beta-\alpha=(3-i)-(-1+2i)=4-3i$　　$\gamma'=\gamma-\alpha$

点 γ' は，点 β' を原点を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから

$\gamma'=i\beta'=i(4-3i)=3+4i$

よって　$\gamma=\gamma'+\alpha=(3+4i)+(-1+2i)=2+6i$

回転の複素数を使えるように。

参考 点 β が，点 α を中心として角 θ だけ回転して点 γ に移るとき，次の式が成り立つ。

$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$

これを利用して求めてもよい。

$\boxed{4}$ $\alpha=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ とする。α^n が実数となるような最小の正の整数 n を求めよ。

解答 $n=12$　6

$1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{3}+i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

したがって

$\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$　3

よって

$\alpha^n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left\{\cos\left(n\times\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(n\times\dfrac{\pi}{12}\right)\right\}$

α^n が実数となるとき　$\sin\left(n\times\dfrac{\pi}{12}\right)=0$　ゆえに　$n\times\dfrac{\pi}{12}=m\pi$（$m$ は整数）

したがって　$n=12m$

よって，求める最小の正の整数 n は，$m=1$ とすると　$n=12$

$\boxed{5}$ 極座標に関して，点 $\left(2,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ を通り，始線に平行な直線の極方程式を求めよ。

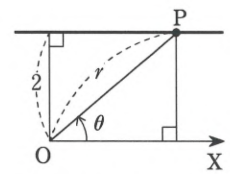
同じ式になれば 4
$r\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=2$ など.

解答 $r=\dfrac{2}{\sin\theta}$　6

直線上の点Pの極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，

$\mathrm{OP}\sin\theta=2$ より　$r\sin\theta=2$

よって，求める極方程式は　$r=\dfrac{2}{\sin\theta}$



$\boxed{6}$ 円 $(x+2)^2+y^2=1$ に外接し，直線 $x=1$ に接する円 C の中心を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。点Pの軌跡はどのような曲線になるか。

解答 放物線 $y^2=-8x$　6

絶対値ははずすこと

円 $(x+2)^2+y^2=1$ の中心 $(-2,\ 0)$ をAとし，Pから直線 $x=1$ に下ろした垂線をPHとする。

$\mathrm{PA}-1=\mathrm{PH}$ であるから

$\sqrt{(x+2)^2+y^2}-1=1-x$　3

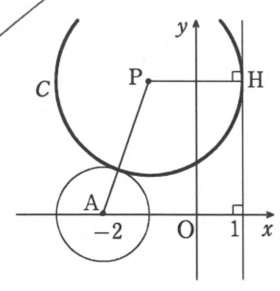
すなわち　$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2-x$

両辺を2乗して整理すると　$y^2=-8x$　……①

よって，点Pは放物線①上にある。

逆に，放物線①上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，点Pの軌跡は　放物線 $y^2=-8x$



別解 Pを中心とする円の半径を r とし，円 $(x+2)^2+y^2=1$ の中心 $(-2,\ 0)$ をAとする。

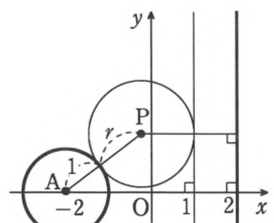
2つの円が外接するとき　$\mathrm{AP}=r+1$

Pと直線 $x=1$ の距離は r であるから，Pと直線 $x=2$ の距離は　$r+1$

よって，点Pは，定点Aと定直線 $x=2$ から等距離にあるので，その軌跡は焦点が点A $(-2,\ 0)$，準線が直線 $x=2$ の放物線で，その方程式は

$y^2=4\cdot(-2)x$　すなわち　$y^2=-8x$

したがって，点Pの軌跡は　放物線 $y^2=-8x$



$\boxed{7}$ 2点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を焦点とし，2直線 $y=\sqrt{3}x$，$y=-\sqrt{3}x$ を漸近線とする双曲線の方程式を求めよ。

解答 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$　6

焦点が x 軸上にあるから，求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>0,\ b>0)$ とおける。

焦点の座標について　$\sqrt{a^2+b^2}=2$

両辺を2乗して　$a^2+b^2=4$　……①

漸近線の方程式は，$y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$ で，その傾きは　$\pm\dfrac{b}{a}$

よって　$\left(\dfrac{b}{a}\right)^2=(\sqrt{3})^2$　すなわち　$\dfrac{b^2}{a^2}=3$　……②

①，②より　$a^2=1$，$b^2=3$　4

したがって，求める双曲線の方程式は　$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

$\boxed{8}$ 複素数 α , β が $|\alpha|=1$, $|\beta|=\sqrt{2}$, $|\alpha-\beta|=1$ を満たし，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の虚部は正であるとする。このとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求めよ。

$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\dfrac{|\beta|}{|\alpha|}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$ …(*)

また $|\alpha-\beta|=|\alpha|\left|1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=1$ より

$\left|1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=1$.

(*)より

$\dfrac{\beta}{\alpha}=\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$

$(0\leqq\theta<2\pi)$

とおくと

$|(1-\sqrt{2}\cos\theta)+i(-\sqrt{2}\sin\theta)|=1$

$\sqrt{(1-\sqrt{2}\cos\theta)^2+(-\sqrt{2}\sin\theta)^2}=1$

$1-2\sqrt{2}\cos\theta+2=1^2$

ゆえに

$\cos\theta=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

虚部は正より

$\sin\theta>0$

つまり $0<\theta<\pi$

この範囲で $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

となるのは $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のみ.

以上より

$\dfrac{\beta}{\alpha}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$　6

$=1+i$　8

$\boxed{9}$ 方程式 $z^4=-1$ を解け。

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$

とおくと $z^4=-1$ は

$r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)$

ゆえに

$\begin{cases} r^4=1 \\ 4\theta=\pi+2k\pi\ (k=0,1,2,3) \end{cases}$

よって

$\begin{cases} r=1 \\ \theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}k\pi\ (k=0,1,2,3) \end{cases}$　6

10

因数分解したい人は
この方法でも
できるように.

以上より

$z=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$，$\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi$，$\cos\dfrac{5}{4}\pi+i\sin\dfrac{5}{4}\pi$，$\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi$

つまり　$z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

62

10 $z+\dfrac{1}{z}$ が実数となる複素数 z が表す複素数平面上の点全体は，どのような図形を表すか。

$z+\dfrac{1}{z}$ が実数 $\Longleftrightarrow$ $z+\dfrac{1}{z}=\overline{z+\dfrac{1}{z}}$ （ただし $z\neq 0$）

$\Longleftrightarrow$ $z+\dfrac{1}{z}=\bar{z}+\dfrac{1}{\bar{z}}$

両辺に $z\bar{z}$ をかけて

$$z\cdot z\bar{z}+\bar{z}=\bar{z}\cdot z\bar{z}+z$$

$$z\cdot|z|^2+\bar{z}-\bar{z}|z|^2-z=0$$

$$(z-\bar{z})|z|^2+(\bar{z}-z)=0$$

$$(z-\bar{z})(|z|^2-1)=0$$ 4

ゆえに $z=\bar{z}$ または $|z|^2=1$

したがって z は実数 または $|z|=1$

以上より点 z は 8

実軸上の点 または原点中心半径1の円上

-2 → （ただし原点は除く）

11 点 $(0,1)$ を通り，双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ と共有点を1つしかもたない直線のうち，傾きが負である直線の方程式を求めよ。

直線 $x=0$ は双曲線と共有点をもたないので.
点 $(0,1)$ を通る直線を $y=kx+1$ とおく.

代入して

$$\frac{x^2}{2}-(kx+1)^2=1$$

整理して

$$(1-2k^2)x^2-4kx-4=0 \quad \cdots(*)$$

・ $1-2k^2=0$ （$k<0$ より $k=-\frac{1}{\sqrt{2}}$）のとき

方程式 $(*)$ は $x=\frac{1}{k}$ という1つの解をもつ

・ $1-2k^2\neq 0$ のとき.

2次方程式 $(*)$ の判別式について

$$D/4=(-2k)^2-(1-2k^2)(-4)$$
$$=4k^2+4(1-2k^2)$$
$$=4(1-k^2)=0 \quad k<0 \text{ より } k=-1$$ 8

以上より $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+1$，$y=-x+1$ （計4）

12 点 $(-3,1)$ を通り，楕円 $x^2+\dfrac{(y-1)^2}{2}=1$ に接する直線の方程式を求めよ。

接点を (p, q) とおくと，楕円上のこの点における接線の方程式は

$$(x-0)(p-0)+\frac{1}{2}(y-1)(q-1)=1 \quad \cdots(*)$$

$(*)$ が点 $(-3,1)$ を通るので.

$$-3p+\frac{1}{2}(1-1)(q-1)=1. \quad \text{よって } p=-\frac{1}{3}$$ 4

また，接点は楕円上の点より $p^2+\dfrac{(q-1)^2}{2}=1$ を満たす

$p=-\frac{1}{3}$ を代入して

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{2}(q-1)^2=1$$

$$(q-1)^2=\frac{16}{9} \text{ より } q-1=\pm\frac{4}{3}$$

$(*)$ に代入して

$$x\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}(y-1)\left(\pm\frac{4}{3}\right)=1$$

整理して 10

$x+2y+1=0$，$x-2y+5=0$ （計3）

13 次の式で表される点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，どのような曲線を描くか。 $x=\dfrac{2t}{1-t^2}$，$y=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$

解答 双曲線 $x^2-y^2=-1$ ただし，点 $(0,\ -1)$ を除く 6

与えられた式より $xt^2+2t=x$ ……①，$(y+1)t^2=y-1$ ……②

$y=-1$ は ② を満たさないから $y\neq -1$

①，② を t，t^2 の連立方程式とみて解くと $t=\dfrac{x}{y+1}$，$t^2=\dfrac{y-1}{y+1}$

t を消去すると $\left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2=\dfrac{y-1}{y+1}$ 式を整理すると $x^2-y^2=-1$

よって，求める曲線は 双曲線 $x^2-y^2=-1$ ただし，点 $(0,\ -1)$ を除く。

でなければ -2

参

$$\lim_{t\to\pm\infty}x=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{2t}{1-t^2}=0$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}y=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1+t^2}{1-t^2}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{t^2}+1}{\frac{1}{t^2}-1}=-1$$

よって $(0,-1)$ に点 P が到達するのは $t\to\pm\infty$ のとき

14 複素数 z が等式 $|2iz+6|=|z-3|$ を満たすとき，$|z|$ の最小値を求めよ。ただし，i は虚数単位である。

解答 $\sqrt{17}-2\sqrt{2}$ 6

$|2iz+6|=|z-3|$ より $|2i(z-3i)|=|z-3|$ よって $2|z-3i|=|z-3|$

ゆえに $4|z-3i|^2=|z-3|^2$ すなわち $4(z-3i)\overline{(z-3i)}=(z-3)\overline{(z-3)}$

よって $4(z-3i)(\bar{z}+3i)=(z-3)(\bar{z}-3)$

ゆえに $z\bar{z}+(1+4i)z+(1-4i)\bar{z}+9=0$

すなわち $\{z+(1-4i)\}\{\bar{z}+(1+4i)\}-17+9=0$

よって $(z+1-4i)\overline{(z+1-4i)}=8$

ゆえに $|z+1-4i|^2=8$ 3

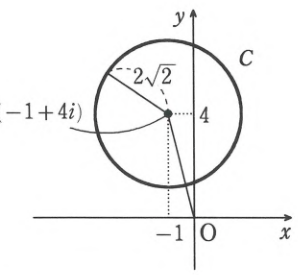
すなわち $|z+1-4i|=2\sqrt{2}$

よって，点 z の全体は

点 $\mathrm{C}(-1+4i)$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円 C

ゆえに，z が点 C と原点を結ぶ線分と C の交点であるとき $|z|$ は最小となり，その値は

$|-1+4i|-2\sqrt{2}=\sqrt{17}-2\sqrt{2}$



別解 $z=x+yi$（x，y は実数）とすると，$|2iz+6|=|z-3|$ より

$|2i(x+yi)+6|=|x+yi-3|$

よって $2|-(y-3)+xi|=|(x-3)+yi|$

ゆえに $4|-(y-3)+xi|^2=|(x-3)+yi|^2$

ゆなわち $4\{x^2+(y-3)^2\}=(x-3)^2+y^2$ 3

よって $x^2+2x+y^2-8y+9=0$ ゆえに $(x+1)^2+(y-4)^2=8$

すなわち，点 z の全体は 点 $\mathrm{C}(-1+4i)$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円 C

(以下同様)

別解 $\mathrm{A}(3i)$，$\mathrm{B}(3)$，$\mathrm{P}(z)$ とする。

$|2iz+6|=|z-3|$ より $2|z-3i|=|z-3|$

よって $2\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ （アポロニウスの円）

ゆえに $\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:2$

線分 AB を $1:2$ に内分する点を $\mathrm{D}(1+2i)$，

$1:2$ に外分する点を $\mathrm{E}(-3+6i)$ とする。

線分 DE の中点を表す複素数は $-1+4i$，

$\mathrm{DE}=4\sqrt{2}$ であるから，点 P が表す図形は 3

点 $\mathrm{C}(-1+4i)$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円 C

(以下同様)