統一テスト（複素数平面）Ｈ３０．５．２５　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の複素数の絶対値を求めよ。　$\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i$

$\boxed{2}$ $\alpha=1-3i$，$\beta=x+i$ について，2 点 A$(\alpha)$，B$(\beta)$ と原点 O が一直線上にあるとき，実数 $x$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 複素数 $\alpha$ について，$|\alpha|=1$ のとき，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ は実数であることを証明せよ。

$\boxed{4}$ 2 つの複素数 $\alpha=1-\sqrt{3}\,i$，$\beta=\sqrt{3}+i$ について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 $\theta$ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$\boxed{5}$ $\alpha=1+2\sqrt{2}\,i$，$\beta=4-3i$ のとき，$|\alpha\beta^2|$ を求めよ。

$\boxed{6}$ $z=6+2i$ とする。点 $z$ を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

$\boxed{7}$ $(-1+i)^{12}$ を計算せよ。

$\boxed{8}$ 2 点 A$(1-i)$，B$(4+3i)$ を結ぶ線分 AB について，2 : 1 に内分する点 C，外分する点 D を表す複素数を求めよ。

$\boxed{9}$ 次の 3 点 A，B，C を頂点とする △ABC の重心を表す複素数を求めよ。
A$(-1+4i)$，B$(3+2i)$，C$(4-3i)$

$\boxed{10}$ $\alpha=1+2i$，$\beta=x+i$ とする。原点 O と点 A$(\alpha)$，B$(\beta)$ について，OA⊥OB であるような実数 $x$ の値を求めよ。

$\boxed{11}$ 次の 3 点 A$(-2-3i)$，B$(5-2i)$，C$(-6)$ について，∠BAC の大きさを求めよ。

$\boxed{12}$ $|z|=3$ かつ $|z-2|=4$ を満たす複素数 $z$ について，次の値を求めよ。

(1) $z\overline{z}$　　(2) $z+\overline{z}$

$\boxed{13}$ $\alpha=2+3i$，$\beta=4+i$ とする。点 $\beta$ を，点 $\alpha$ を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 $\gamma$ を求めよ。

$\boxed{14}$ 点 $z$ が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，$w=iz-i$ で表される点 $w$ はどのような図形を描くか。

$\boxed{15}$ 方程式 $|z+1|=2|z-2|$ を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

$\boxed{16}$ 次の方程式を解け。$z^3=8i$

$\boxed{17}$ 異なる 4 つの複素数 $z_1$，$z_2=1-i$，$z_3=3+i$，$z_4=-\dfrac{1}{3}+3i$ について，4点 A$(z_1)$，B$(z_2)$，C$(z_3)$，D$(z_4)$ を結んでできる四角形ABCDは円に内接する。点Aが実軸上の点であるとき，複素数 $z_1$ を求めよ。

統一テスト（複素数平面）H３０．５．２５　(25点)　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1 次の複素数の絶対値を求めよ。 $\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i$　　解答 $2\sqrt{2}$

$|\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$　2

2 $\alpha=1-3i$，$\beta=x+i$ について，2 点 A$(\alpha)$，B$(\beta)$ と原点 O が一直線上にあるとき，実数 $x$ の値を求めよ。　解答 $x=-\dfrac{1}{3}$

3 点 O，A，B が一直線上にあることから，$\beta=k\alpha$ となる実数 $k$ がある。

$x+i=k(1-3i)$ から　$x+i=k-3ki$

よって　$x=k$，$1=-3k$　2

$k=-\dfrac{1}{3}$ から　$x=-\dfrac{1}{3}$

3 複素数 $\alpha$ について，$|\alpha|=1$ のとき，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ は実数であることを証明せよ。

$|\alpha|=1$ のとき，$|\alpha|^2=1$ であるから　$\alpha\overline{\alpha}=1$　すなわち　$\dfrac{1}{\alpha}=\overline{\alpha}$

よって　$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\alpha+\overline{\alpha}$

$\alpha+\overline{\alpha}$は実数であるから，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ は実数である。　//

4 2 つの複素数 $\alpha=1-\sqrt{3}\,i$，$\beta=\sqrt{3}+i$ について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 $\theta$ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

解答 $\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の順に $4\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$，$\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi$

偏角が $0\leqq\theta<2\pi$ に入ってない　3

$\alpha=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$　1

$\beta=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$　1

よって

$\alpha\beta=4\left\{\cos\left(\dfrac{5}{3}\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{5}{3}\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}=4\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2}{2}\left\{\cos\left(\dfrac{5}{3}\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{5}{3}\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}=\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi$

5 $\alpha=1+2\sqrt{2}\,i$，$\beta=4-3i$ のとき，$|\alpha\beta^2|$ を求めよ。　解答 75

$|\alpha|=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$　$|\beta|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$　より　$|\alpha\beta^2|=|\alpha||\beta|^2=3\cdot5^2=75$　2

6 $z=6+2i$ とする。点 $z$ を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

解答 $(3+\sqrt{3})+(1-3\sqrt{3})i$

$\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}(6+2i)=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(6+2i)=(3+\sqrt{3})+(1-3\sqrt{3})i$

2

7 $(-1+i)^{12}$ を計算せよ。　解答 $-64$

$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$ であるから

$(-1+i)^{12}=(\sqrt{2})^{12}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)^{12}=64\left\{\cos\left(12\times\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(12\times\dfrac{3}{4}\pi\right)\right\}$

$=64(\cos9\pi+i\sin9\pi)=-64$　2

8 2 点 A$(1-i)$，B$(4+3i)$ を結ぶ線分 AB について，2 : 1 に内分する点 C，外分する点 D を表す複素数を求めよ。

解答　順に $3+\dfrac{5}{3}i$，$7+7i$

点 C を表す複素数は　$\dfrac{1\times(1-i)+2\times(4+3i)}{2+1}=3+\dfrac{5}{3}i$　2

点 D を表す複素数は　$\dfrac{-1\times(1-i)+2\times(4+3i)}{2-1}=7+7i$　2

9 次の 3 点 A，B，C を頂点とする △ABC の重心を表す複素数を求めよ。

A$(-1+4i)$，B$(3+2i)$，C$(4-3i)$　解答 $2+i$

$\dfrac{(-1+4i)+(3+2i)+(4-3i)}{3}=2+i$　2

10 $\alpha=1+2i$，$\beta=x+i$ とする。原点 O と点 A$(\alpha)$，B$(\beta)$ について，OA⊥OB であるような実数 $x$ の値を求めよ。　解答 $x=-2$

OA⊥OB ならば，$\beta=w\alpha$ を満たす純虚数 $w=bi$ がある。

よって，$x+i=bi(1+2i)$ より　2

$x+i=-2b+bi$　したがって　$x=-2b$，$1=b$

$b=1$ であるから　$x=-2\cdot1=-2$

11 次の 3 点 A$(-2-3i)$，B$(5-2i)$，C$(-6)$ について，∠BAC の大きさを求めよ。

解答 $\dfrac{3}{4}\pi$

$\alpha=-2-3i$，$\beta=5-2i$，$\gamma=-6$ とする。

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{-4+3i}{7+i}=\dfrac{(-4+3i)(7-i)}{(7+i)(7-i)}=\dfrac{-25+25i}{50}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$　2

偏角 $\theta$ の範囲を $-\pi<\theta\leqq\pi$ として，$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ を極形式で表すと

$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

よって　∠BAC$=\dfrac{3}{4}\pi$

/65

12 $|z|=3$ かつ $|z-2|=4$ を満たす複素数 $z$ について，次の値を求めよ。

(1) $z\overline{z}$　　　(2) $z+\overline{z}$

解答 (1) 9　(2) $-\dfrac{3}{2}$

(1) $z\overline{z}=|z|^2=9$

(2) $|z-2|^2=16$ より　$(z-2)\overline{(z-2)}=16$

したがって　$(z-2)(\overline{z}-2)=16$

よって　$z\overline{z}-2z-2\overline{z}+4=16$　2

(1) より，$z\overline{z}=9$ であるから

$$9-2(z+\overline{z})+4=16$$

したがって　$-2(z+\overline{z})=3$

よって　$z+\overline{z}=-\dfrac{3}{2}$

13 $\alpha=2+3i$，$\beta=4+i$ とする。点 $\beta$ を，点 $\alpha$ を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 $\gamma$ を求めよ。

解答 $\gamma=(3+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})i$

点 $\alpha$ が原点 O に移るような平行移動で，点 $\beta$，$\gamma$ がそれぞれ点 $\beta'$，$\gamma'$ に移るとすると

$$\beta'=\beta-\alpha=(4+i)-(2+3i)=2-2i \qquad \gamma'=\gamma-\alpha$$

点 $\gamma'$ は，点 $\beta'$ を原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから

$$\gamma'=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\beta'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2-2i)=(1+\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})i$$ 2

よって　$\gamma=\gamma'+\alpha=(1+\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})i+(2+3i)=(3+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})i$

参考 点 $\beta$ が，点 $\alpha$ を中心として角 $\theta$ だけ回転して点 $\gamma$ に移るとき，次の式が成り立つ。

$$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$$

これを利用して求めてもよい。

14 点 $z$ が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，$w=iz-i$ で表される点 $w$ はどのような図形を描くか。

解答 点 $-i$ を中心とする半径 1 の円

$w=iz-i$ より $z=\dfrac{w+i}{i}$ であるから　$|z|=\left|\dfrac{w+i}{i}\right|=\dfrac{|w+i|}{|i|}=|w+i|$

よって　$|w+i|=1$　2

したがって，点 $w$ は点 $-i$ を中心とする半径 1 の円を描く。

15 方程式 $|z+1|=2|z-2|$ を満たす点 $z$ 全体は，どのような図形か。

解答 点 3 を中心とする半径 2 の円

方程式の両辺を 2 乗すると　$|z+1|^2=4|z-2|^2$

よって　$(z+1)\overline{(z+1)}=4(z-2)\overline{(z-2)}$

$(z+1)(\overline{z}+1)=4(z-2)(\overline{z}-2)$

両辺を展開して整理すると　$z\overline{z}-3z-3\overline{z}+5=0$　2

式を変形すると　$(z-3)(\overline{z}-3)=4$　すなわち　$|z-3|^2=2^2$

したがって　$|z-3|=2$

これは，点 3 を中心とする半径 2 の円である。 (中心1 半径1)

参考 この円は，2 点 $-1$，2 からの距離の比が 2：1 である点 $z$ 全体である (アポロニウスの円)。

16 次の方程式を解け。$z^3=8i$　解答 $z=\sqrt{3}+i$，$-\sqrt{3}+i$，$-2i$

$z$ の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ …… ① とすると　$z^3=r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)$

また，$8i$ を極形式で表すと　$8i=8\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

よって，方程式は　$r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=8\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると　$r^3=8$，$3\theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$　($k$ は整数)

$r>0$ であるから　$r=2$ …… ②　また　$\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}$　3

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，$k=0$，1，2 であるから　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$ …… ③

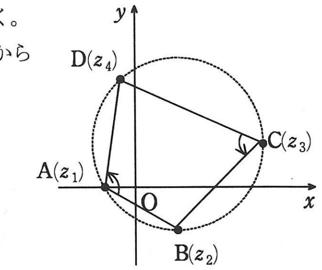
②，③ を ① に代入して，求める解は　$z=\sqrt{3}+i$，$-\sqrt{3}+i$，$-2i$

(各1)

17 異なる 4 つの複素数 $z_1$，$z_2=1-i$，$z_3=3+i$，$z_4=-\dfrac{1}{3}+3i$ について，4点 A$(z_1)$，B$(z_2)$，C$(z_3)$，D$(z_4)$ を結んでできる四角形ABCDは円に内接する。点Aが実軸上の点であるとき，複素数 $z_1$ を求めよ。

解答 $z_1=-1$

$z_1$ は実軸上の点なので実数である。ゆえに $z_1=x$ とおく。




四角形ABCDが円に内接するので，内接四角形の性質から

$\angle$BAD$+\angle$BCD$=180^\circ$

つまり

$$\arg\frac{z_4-z_1}{z_2-z_1}+\arg\frac{z_2-z_3}{z_4-z_3}=\pi \quad \cdots(※)$$

が成り立つ。

$$\frac{z_4-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\left(-\frac{1}{3}+3i\right)-x}{(1-i)-x}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{(1+3r)-9i}{(1-r)-i}$$

$$\frac{z_2-z_3}{z_4-z_3}=\frac{(1-i)-(3+i)}{\left(-\frac{1}{3}+3i\right)-(3+i)}=\frac{-2-2i}{-\frac{10}{3}+2i}=3\cdot\frac{1+i}{5-3i}$$

したがって，(※)より　$\arg\left(\dfrac{z_4-z_1}{z_2-z_1}\cdot\dfrac{z_2-z_3}{z_4-z_3}\right)=\pi$ が成り立つから，$\dfrac{z_4-z_1}{z_2-z_1}\cdot\dfrac{z_2-z_3}{z_4-z_3}$ は負の実数となる。 2

(答えを導く考え方に対して)

$$\frac{z_4-z_1}{z_2-z_1}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_4-z_3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{(1+3x)-9i}{(1-x)-i}\times3\cdot\frac{1+i}{5-3i}$$

$$=-\frac{(1+3x)+9i}{(1-x)-i}\cdot\frac{1+i}{5-3i}$$

より，$k$ を正の実数として

$$-\frac{(1+3x)-9i}{(1-x)-i}\cdot\frac{1+i}{5-3i}=-k$$

と表される。分母はらうと

$$\{(1+3x)-9i\}(1+i)=k\{(1-x)-i\}(5-3i)$$

両辺展開して

$$(10+3x)+(-8+3x)i=k\{(2-5x)+(-8+3x)\}$$

$x$，$k$ は実数より，両辺の実部と虚部を比較して

$$\begin{cases}10+3x=k(2-5x) & \cdots① \\ -8+3x=k(-8+3x) & \cdots②\end{cases}$$

図より $\angle$BADは鈍角になるので，点A は直線BDよりも左側にある。したがって $-8+3x\neq0$ より，②から $k=1$ となる ($k>0$ を満たす)。①に代入して $10+3x=2-5x$ から $x=-1$

以上より，$z_1=-1$