

1. 2つの等差数列$\{a_n\}, \{b_n\}$が以下のように定義されている。 $\{a_n\}: 1, 4, 7, \dots, 1000$ $\{b_n\}: 11, 21, 31, \dots, 1001$ このとき、$\{a_n\}$と$\{b_n\}$の共通に含まれる項を、順に並べてできる数列を$\{c_n\}$とすると、数列$\{c_n\}$の初項から末項までの和を求めよ。	2. 初項が1、公差が2の等差数列を$\{a_n\}$とする。また、数列$\{b_n\}$について、nを3で割った余りをb_nとする。このとき、以下の問いに答えよ。 (1) $\sum_{k=1}^{100} b_k$を求めよ。 (2) $\sum_{k=1}^{100} a_k b_k$を求めよ。	3. 次の数列の初項から第n項までの和をnを用いて表せ。 (1) $\frac{1}{1 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 10}, \frac{1}{10 \cdot 13}, \dots$ (2) $1, 4 \cdot 3, 7 \cdot 3^2, 10 \cdot 3^3, \dots$
---	---	---

4. 数列 $\{a_n\}$ が $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n^2$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

5. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2, a_{n+1}=a_n+3n^2+n$

(2) $a_1=2, a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$

(3) $a_1=3, a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$

(4) $a_1=1, a_{n+1}=3a_n+2n-1$

1. 2つの等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が以下のように定義されている。

$$\{a_n\}: 1, 4, 7, \dots, 1000$$

$$\{b_n\}: 11, 21, 31, \dots, 1001$$

このとき, $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の共通に含まれる項を, 順に並べてできる数列を $\{c_n\}$ とすると, 数列 $\{c_n\}$ の初項から末項までの和を求めよ。

$$\{a_n\}: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52,$$

$$55, 58, 61, 64, \dots$$

$$\{b_n\}: 11, 21, 31, 41, 51, 61, \dots$$

$$\text{共通項は } 31, 61, 91, \dots$$

よ! 数列 $\{c_n\}$ は

初項 31, 公差 30 の等差数列

$$\begin{aligned} \therefore c_n &= 31 + (n-1) \cdot 30 \\ &= 30n + 1 \end{aligned}$$

よ! 数列 $\{c_n\}$ の末項は

$$30n + 1 < 1000 \quad \therefore n < \frac{999}{30} = 33.3$$

$$\text{よ! } c_{33} = 30 \cdot 33 + 1 = 991 \text{ が } \{c_n\} \text{ の末項である}$$

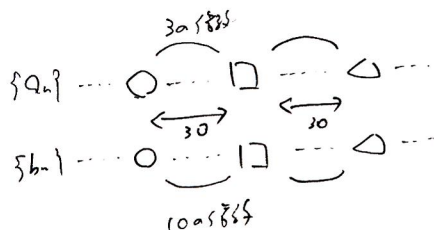
よ!

$$S = \frac{1}{2} \cdot 33 (31 + 991) = 16863$$

(三)

2つの等差数列の共通項を

共通項を数列を形成する。



2. 初項が1, 公差が2の等差数列を $\{a_n\}$ とする。また, 数列 $\{b_n\}$ について, n を3で割った余りを b_n とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

$$(1) \sum_{k=1}^{100} b_k \text{ を求めよ。}$$

$$(2) \sum_{k=1}^{100} a_k b_k \text{ を求めよ。}$$

$$(1) \{b_n\}: 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, \dots$$

よ! 群で考えると 第100項は 第34群の1番目

よ! 1, 2, 0 が 33回繰り返り 2回だけ 1, 2 が

1回だけ

$$\therefore \sum_{k=1}^{100} b_k = (1+2+0) \times 33 + 1 = 100 \quad \text{--- (10)}$$

$$(2) \sum_{k=1}^{100} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_{100} b_{100}$$

$$= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 0$$

$$+ a_4 \cdot 1 + a_5 \cdot 2 + a_6 \cdot 0$$

$$+ \dots$$

$$+ a_{97} \cdot 1 + a_{98} \cdot 2 + a_{99} \cdot 0$$

$$+ a_{100} \cdot 1$$

$$\therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1 \quad n=1$$

$$\sum_{k=1}^{100} a_k b_k = 1 \cdot (a_1 + a_4 + \dots + a_{97} + a_{100}) \quad \leftarrow 34 \text{ 項}$$

$$+ 2 \cdot (a_2 + a_5 + \dots + a_{98}) \quad \leftarrow 33 \text{ 項}$$

$$+ 0 \cdot (a_3 + a_6 + \dots + a_{99}) \quad \leftarrow 33 \text{ 項}$$

$$= 1 \cdot (1 + 7 + \dots + 193 + 199) = 3400$$

$$+ 2 \cdot (3 + 9 + \dots + 195) = 6534$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 34 (1 + 199) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 33 (3 + 195) = 9934 \quad \text{--- (10)}$$

3. 次の数列の初項から第 n 項までの和を n を用いて表せ。

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 10}, \frac{1}{10 \cdot 13}, \dots$$

$$(2) 1, 4 \cdot 3, 7 \cdot 3^2, 10 \cdot 3^3, \dots$$

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{3n+1-1}{3n+1} \right) = \frac{n}{3n+1} \quad \text{--- (10)}$$

$$(2) S = 1 + 4 \cdot 3 + 7 \cdot 3^2 + \dots + (3n-2) \cdot 3^{n-1}$$

$$3S = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + \dots + (3n-5) \cdot 3^{n-1} + (3n-2) \cdot 3^n$$

$$-2S = 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + 3 \cdot 3^{n-1} - (3n-2) \cdot 3^n$$

初項 3, 3
公差 3
項数 n-1
の等差数列の和

$$\therefore -2S = 1 + \frac{3 \cdot 3 (3^{n-1} - 1)}{3 - 1} - (3n-2) \cdot 3^n$$

$$= 1 + \frac{3 \cdot 3^n - 9}{2} - (3n-2) \cdot 3^n$$

$$= \frac{2 + 3 \cdot 3^n - 9 - 2(3n-2) \cdot 3^n}{2}$$

$$= \frac{-7 + (3 - 6n + 4) \cdot 3^n}{2} = \frac{-7 + (-6n + 7) \cdot 3^n}{2}$$

$$\therefore S = \frac{(6n-1) \cdot 3^n + 7}{4} \quad \text{--- (10)}$$

4. 数列 $\{a_n\}$ が $a_1+2a_2+3a_3+\dots+na_n=n^2$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

$$S_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n \quad \text{と} \quad a_1 < 0$$

$$S_{n-1} = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1} \quad \text{と} \quad a_1 < 0$$

$$\therefore S_n = a_1 + 2a_2 + \dots + (n-1)a_{n-1} + na_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + 2a_2 + \dots + (n-1)a_{n-1}$$

$$\text{よ} \quad n \geq 2 \text{ のとき}$$

$$S_n - S_{n-1} = na_n$$

$$\therefore a_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} \quad \text{と} \quad a_1 < 0$$

$$-\frac{1}{8} \text{ として } S_n = n^2 \text{ として } S_{n-1} = (n-1)^2 \text{ と} \quad a_1 < 0$$

$$a_n = \frac{n^2 - (n-1)^2}{n} = \frac{2n-1}{n} \quad (*)$$

また、

$$a_1 = S_1 = 1^2 \quad \text{より}$$

$$(*) \text{ として } n=1 \text{ として } a_1 = 1 \text{ と} \quad a_1 < 0$$

$$\frac{2 \cdot 1 - 1}{1} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{と} \quad a_1 = 1 \text{ と} \quad a_1 < 0$$

$$\therefore a_n = \frac{2n-1}{n} \quad (10)$$

5. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$(1) a_1=2, a_{n+1}=a_n+3n^2+n$$

$$(2) a_1=2, a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$$

$$(3) a_1=3, a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$$

$$(4) a_1=1, a_{n+1}=3a_n+2n-1$$

$$(1) \quad n \geq 2 \text{ のとき}$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k^2+k)$$

$$= 2 + 3 \cdot \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) + \frac{1}{2} (n-1)n$$

$$= n^3 - n^2 + 2 \quad (*)$$

$$\therefore (*) \text{ として } n=1 \text{ として } 1^3 - 1^2 + 2 = 2$$

$$\text{よ} \quad a_1 = 2 \text{ と}$$

$$\therefore a_n = n^3 - n^2 + 2 \quad (10)$$

$$(2) \quad \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n+1}{a_n} = 3 + \frac{1}{a_n}$$

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{ と} \quad b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}, \quad b_{n+1} = 3 + b_n$$

$$\text{よ} \quad \{b_n\} \text{ は初項 } \frac{1}{2}, \text{ 公差 } 3 \text{ の等差数列}$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{2} + 3(n-1) = 3n - \frac{5}{2}$$

$$\therefore b_n = \frac{6n-5}{2} \quad \text{よ} \quad \frac{1}{a_n} = \frac{6n-5}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{6n-5} \quad (10)$$

$$(3) \quad a_{n+1} = 6a_n + 3^{n+1} \quad \text{両辺 } 3^{n+1} \text{ で割ると}$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{6a_n}{3^{n+1}} + 1$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2a_n}{3^n} + 1$$

$$\text{よ} \quad b_n = \frac{a_n}{3^n} \text{ と} \quad b_1 = \frac{a_1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{また} \quad b_{n+1} = 2b_n + 1$$

$$\therefore \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = 2b_n + 1 \end{cases} \quad \text{と} \quad a_1 < 0$$

$$-\frac{1}{2} \text{ として } d = 2d + 1 \rightarrow d = -1$$

$$b_{n+1} - d = 2(b_n - d) \quad \therefore b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$$

$$\text{また } b_1 + 1 = 1 + 1 = 2 \text{ として}$$

$$\text{数列 } \{b_n + 1\} \text{ は初項 } 2, \text{ 公差 } 2 \text{ の等差数列}$$

$$\therefore b_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\text{よ} \quad b_n = 2^n - 1$$

$$\text{また } b_n = \frac{a_n}{3^n} \text{ として } a_n = 3^n b_n = 3^n (2^n - 1)$$

$$\therefore a_n = 6^n - 3^n \quad (10)$$

$$(4) \quad f(x) = \alpha x + \beta \text{ と}$$

$$a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1 \quad \text{と} \quad a_{n+1} - f(n+1) = 3(a_n - f(n))$$

$$\text{と変換して } f \text{ と}$$

$$a_{n+1} - \alpha(n+1) - \beta = 3(a_n - \alpha n - \beta)$$

$$\therefore a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha n + \alpha - 2\beta$$

$$\text{係数比較して}$$

$$-2\alpha = 2 \quad (\text{係数}), \quad \alpha - 2\beta = -1 \quad (\text{定数項})$$

$$\text{よ} \quad \alpha = -1, \quad \beta = 0 \text{ と}$$

$$\text{よ} \quad a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1 \text{ と}$$

$$a_{n+1} + (n+1) = 3(a_n + n) \quad \text{と変換して}$$

$$\text{数列 } \{a_n + n\} \text{ は初項 } a_1 + 1 = 1 + 1 = 2, \text{ 公差 } 3 \text{ の等差数列}$$

$$\therefore a_n + n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \text{よ} \quad a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - n \quad (10)$$