数学演習（漸化式）Ｈ２２・９・３　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3$　　(2) $a_1=3,\ a_{n+1}-a_n=-2$

(3) $a_1=3,\ a_{n+1}=-5a_n$　　(4) $a_1=2,\ a_{n+1}-3a_n=0$

2．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+4n$　　(2) $a_1=12,\ a_{n+1}=a_n-2n$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3n^2$　　(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2n+1$

3．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=4,\ a_{n+1}=a_n+5^n$　　(2) $a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=4^n$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

4．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=4,\ a_{n+1}=2a_n-3$

(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=5a_n-4$

(3)　$a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+6$

(4)　$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

5．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-2$

(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{3}+2$

(3)　$a_1=1,\ a_{n+1}=-2a_n+1$

(4)　$a_1=1,\ 2a_{n+1}-a_n+2=0$

6．数列 0，1，1，2，2，2，3，3，3，3，4，…… において

(1)　10 が最初に現れるのは第何項か。

(2)　第 290 項を求めよ。

1．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3$　　(2) $a_1=3,\ a_{n+1}-a_n=-2$

(3) $a_1=3,\ a_{n+1}=-5a_n$　　(4) $a_1=2,\ a_{n+1}-3a_n=0$

解答 (1) $3n-2$　(2) $-2n+5$　(3) $3\times(-5)^{n-1}$　(4) $2\times3^{n-1}$

解説

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3$

$a_{n+1}-a_n=3$

$\{a_n\}$ は初項 1，公差 3 の等差数列である。

よって　$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$

(2) $a_1=3,\ a_{n+1}-a_n=-2$

$\{a_n\}$ は初項 3，公差 -2 の等差数列である。

よって　$a_n=3+(n-1)\times(-2)=-2n+5$

(3) $a_1=3,\ a_{n+1}=-5a_n$

$\{a_n\}$ は初項 3，公比 -5 の等比数列である。

よって　$a_n=3\times(-5)^{n-1}$

(4) $a_1=2,\ a_{n+1}-3a_n=0$

$a_{n+1}=3a_n$

$\{a_n\}$ は初項 2，公比 3 の等比数列である。

よって　$a_n=2\times3^{n-1}$

2．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+4n$　　(2) $a_1=12,\ a_{n+1}=a_n-2n$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3n^2$　　(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2n+1$

解答 (1) $2n^2-2n+1$　(2) $-n^2+n+12$　(3) $\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+2)$

(4) n^2

解説

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+4n$

$a_{n+1}-a_n=4n$

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_n=4n$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}4k=1+4\sum_{k=1}^{n-1}k=1+4\times\frac{1}{2}(n-1)n=2n^2-2n+1$$

よって　$a_n=2n^2-2n+1$　…… ①

① において $n=1$ を代入すると　$a_1=1$

よって，① は $n=1$ でも成り立つ。

したがって　$a_n=2n^2-2n+1$

(2) $a_1=12,\ a_{n+1}=a_n-2n$

$a_{n+1}-a_n=-2n$

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_n=-2n$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=12+\sum_{k=1}^{n-1}(-2k)=12-2\sum_{k=1}^{n-1}k=12-2\times\frac{1}{2}(n-1)n=-n^2+n+12$$

よって　$a_n=-n^2+n+12$　…… ①

① において $n=1$ を代入すると　$a_1=12$

よって，① は $n=1$ でも成り立つ。

したがって　$a_n=-n^2+n+12$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3n^2$

$a_{n+1}-a_n=3n^2$

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_n=3n^2$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}3k^2=1+3\sum_{k=1}^{n-1}k^2=1+3\times\frac{1}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\}$$

$$=1+\frac{1}{2}n(n-1)(2n-1)=\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+2)$$

よって　$a_n=\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+2)$　…… ①

① において $n=1$ を代入すると　$a_1=1$

よって，① は $n=1$ でも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+2)$

(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2n+1$

$a_{n+1}-a_n=2n+1$

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_n=2n+1$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=1+2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}1=1+2\times\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)=n^2$$

よって　$a_n=n^2$　…… ①

① において $n=1$ を代入すると　$a_1=1$

よって，① は $n=1$ でも成り立つ。

したがって　$a_n=n^2$

3．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=4,\ a_{n+1}=a_n+5^n$　　(2) $a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=4^n$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

解答 (1) $a_n=\frac{5^n+11}{4}$　(2) $a_n=\frac{4^n-1}{3}$　(3) $a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

解説

(1)　$a_{n+1}=a_n+5^n$ から　　$a_{n+1}-a_n=5^n$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は 5^n である。

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}5^k=4+\frac{5(5^{n-1}-1)}{5-1}$$

$$=\frac{16+5\cdot5^{n-1}-5}{4}=\frac{5^n+11}{4}$$

この式に $n=1$ を代入すると，$a_1=\frac{5^1+11}{4}=4$ となるから，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{5^n+11}{4}$

(2) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 4^n であるから，

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=1+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}$$

よって　$a_n=\frac{4^n-1}{3}$

初項は $a_1=1$ なので，上の a_n は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{4^n-1}{3}$

(3)　$a_{n+1}=a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ から　　$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。

$n\geqq2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1+\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

この式に $n=1$ を代入すると，$a_1=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}=1$ となるから，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

4．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=4,\ a_{n+1}=2a_n-3$　　(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=5a_n-4$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+6$　　(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

解答 (1) $2^{n-1}+3$　(2) $5^{n-1}+1$　(3) $3\times4^{n-1}-2$　(4) $-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

解説

(1) $a_1=4,\ a_{n+1}=2a_n-3$

$c=2c-3$ を解くと　$c=3$

漸化式を変形すると　$a_{n+1}-3=2(a_n-3)$

$a_n-3=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n$，$b_1=a_1-3=4-3=1$

数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列であるから　$b_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$

よって　$a_n=b_n+3=2^{n-1}+3$

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=5a_n-4$

$c=5c-4$ を解くと　$c=1$

漸化式を変形すると　$a_{n+1}-1=5(a_n-1)$

$a_n-1=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=5b_n$，$b_1=a_1-1=2-1=1$

数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 5 の等比数列であるから　$b_n=1\times5^{n-1}=5^{n-1}$

よって　$a_n=b_n+1=5^{n-1}+1$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+6$

$c=4c+6$ を解くと　$c=-2$

漸化式を変形すると　$a_{n+1}+2=4(a_n+2)$

$a_n+2=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=4b_n$，$b_1=a_1+2=1+2=3$

数列 $\{b_n\}$ は初項 3，公比 4 の等比数列であるから　$b_n=3\times4^{n-1}$

よって　$a_n=b_n-2=3\times4^{n-1}-2$

(4)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

$c=\frac{1}{3}c+2$ を解くと　$c=3$

漸化式を変形すると　$a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$

$a_n-3=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$，$b_1=a_1-3=1-3=-2$

数列 $\{b_n\}$ は初項 -2，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから　$b_n=-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって　$a_n=b_n+3=-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

5．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n-2$　　(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{3}+2$

(3)　$a_1=1$，$a_{n+1}=-2a_n+1$　　(4)　$a_1=1$，$2a_{n+1}-a_n+2=0$

解答　(1)　$a_n=3^{n-1}+1$　(2)　$a_n=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$　(3)　$a_n=\frac{2}{3}(-2)^{n-1}+\frac{1}{3}$

(4)　$a_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2$

解説

(1)　漸化式を変形すると

$$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$$

$b_n=a_n-1$ とすると　$b_{n+1}=3b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は

$$b_1=a_1-1=2-1=1$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+1$ より

$$a_n=3^{n-1}+1$$

(2)　漸化式を変形すると

$$a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$$

$b_n=a_n-3$ とすると　$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列で，初項は

$$b_1=a_1-3=1-3=-2$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+3$ より

$$a_n=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$$

(3)　漸化式を変形すると

$$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-2\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$$

$b_n=a_n-\frac{1}{3}$ とすると　$b_{n+1}=-2b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 -2 の等比数列で，初項は

$$b_1=a_1-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=\frac{2}{3}(-2)^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+\frac{1}{3}$ より

$$a_n=\frac{2}{3}(-2)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

(4)　漸化式を変形すると

$$a_{n+1}+2=\frac{1}{2}(a_n+2)$$

$b_n=a_n+2$ とすると　$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列で，初項は

$$b_1=a_1+2=1+2=3$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n-2$ より

$$a_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2$$

6．数列 0，1，1，2，2，2，3，3，3，3，4，…… において

(1)　10 が最初に現れるのは第何項か。　(2)　第 290 項を求めよ。

解答　(1)　第 56 項　(2)　23

解説

次のように区切り，群に分ける。

(0)，(1，1)，(2，2，2)，(3，3，3，3)，……

初めから第 n 番目の群の終わりまでの項数を l_n とすると

$$l_n=1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(1)　初めから第 10 番目の群の終わりまでの項数は　$l_{10}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11=55$

よって，10 が最初に現れるのは　第 56 項

(2)　第 290 項が第 n 番目の群に含まれるとすると　$l_{n-1}<290\leqq l_n$

よって　$(n-1)n<580\leqq n(n+1)$　……①

$23\cdot 24=552$，$24\cdot 25=600$ であるから，① を満たす自然数 n は　$n=24$

したがって，第 290 項は　23