数学演習（数列）Ｈ２１．３．４　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

1. $a_{10}=-10$, $a_{n+1}-a_n=3$ で定義された数列 $\{a_n\}$ において

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $\sum_{k=1}^{30}|a_k|$ の値を求めよ。

2. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n(n+1)$ で与えられている。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $\sum_{k=1}^{20}\dfrac{1}{a_k a_{k+2}}$ の値を求めよ。

3. $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n+2^n$ で定義されている数列 $\{a_n\}$ において

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $\sum_{k=1}^{n}a_k$ を n を用いて表せ。

4. $a_1=8$, $a_{n+1}=3a_n-10n+7$ で定義された数列 $\{a_n\}$ において

(1) $f(n)=\alpha n+\beta$ とするとき，$a_{n+1}-f(n+1)=3\{a_n-f(n)\}$ を満たす α, β を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

5. $a_1=1$, $a_{n+1}+a_n=4n$ で定義されている数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を推測し，それが正しいことを数学的帰納法を用いて示せ。

6. 数列 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \frac{1}{6}, \cdots$ において

(1) $\dfrac{10}{45}$ は初項から数えて第何項か。

(2) 第４００項を求めよ。

(3) 初項からの和が初めて２００を超えるのは第何項か求めよ。

第４回定期考査の復習　H21.3.4　　　　（　）組（　）番　名前（こたえ　）

1．$a_{10}=-10$，$a_{n+1}-a_n=3$で定義された数列$\{a_n\}$において

(1) 一般項a_nを求めよ。

$\{a_n\}$は公差3の等差数列　$a_{10}=-10$より

$a_{10}=a+(10-1)3=-10$

$\therefore\ a_n=a+(n-1)3$

$\therefore\ a=-37$

$\therefore\ a_n=-37+(n-1)3=3n-40$

(2) $\sum_{k=1}^{30}|a_k|$の値を求めよ。

$3n-40\geqq 0 \iff n\geqq \frac{40}{3}\fallingdotseq 13.3\cdots$ より

$|a_k|=\begin{cases}-a_k & (1\leqq k\leqq 13)\\ a_k & (14\leqq k\leqq 30)\end{cases}$

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(3k-40)=3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-40n=\frac{n}{2}(3n-77)$

$\therefore$

$\sum_{k=1}^{30}|a_k|=\sum_{k=1}^{13}(-a_k)+\sum_{k=14}^{30}a_k$

$=-\sum_{k=1}^{13}a_k+\left(\sum_{k=1}^{30}a_k-\sum_{k=1}^{13}a_k\right)$

$=\sum_{k=1}^{30}a_k-2\sum_{k=1}^{13}a_k=\frac{30}{2}(90-77)-2\cdot\frac{13}{2}(39-77)$

$=689$

2．数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nが$S_n=n(n+1)$で与えられている。

(1) 一般項a_nを求めよ。

$n\geqq 2$のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n(n+1)-(n-1)n=n\{n+1-n+1\}=2n$

$n=1$を代入しても $a_1=S_1=1\times 2=2$　に一致

(2) $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_ka_{k+2}}$の値を求めよ。

$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{2k\cdot 2(k+2)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+2)}$　　$\frac{1}{k(k+2)}=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{8}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{18}}-\cancel{\frac{1}{20}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{19}}-\frac{1}{21}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{20}}-\frac{1}{22}\right)\right\}$

$=\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{21}-\frac{1}{22}\right)=\frac{325}{1848}$

3．$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+2^n$で定義されている数列$\{a_n\}$において

(1) 一般項a_nを求めよ。

$a_{n+1}=2a_n+2^n$　両辺2^{n+1}で割って

$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$

$b_n=\frac{a_n}{2^n}$とおくと

$b_1=\frac{2}{2}=1$，$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}$

$\therefore\ b_n=1+(n-1)\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$

$\therefore\ a_n=2^n\cdot\frac{n+1}{2}=(n+1)2^{n-1}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}a_k$をnを用いて表せ。

$S=\sum_{k=1}^{n}(k+1)2^{k-1}$とおくと

$S=2\times 1+3\times 2+4\times 2^2+\cdots+(n+1)2^{n-1}$

$-)\ 2S=\qquad 2\times 2+3\times 2^2+\cdots+n\,2^{n-1}+(n+1)2^n$

$-S=2\times 1+(1\times 2+1\times 2^2+\cdots+1\times 2^{n-1})-(n+1)2^n$

$=2\times 1+\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-(n+1)2^n$

$=-n2^n$

$\therefore\ S=\sum_{k=1}^{n}a_k=n2^n$

4．$a_1=8$，$a_{n+1}=3a_n-10n+7$で定義された数列$\{a_n\}$において

(1) $f(n)=\alpha n+\beta$とするとき、$a_{n+1}-f(n+1)=3(a_n-f(n))$を満たす$\alpha$，$\beta$を求めよ。

$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=3(a_n-\alpha n-\beta)$

$\iff a_{n+1}=3a_n-2\alpha n+\alpha-2\beta$

よって $\begin{cases}-2\alpha=-10 & (n\text{の係数})\\ \alpha-2\beta=7 & (\text{定数})\end{cases}$ となればよい

$\therefore\ \alpha=5$，$\beta=-1$

(2) 一般項a_nを求めよ。

(1)より $f(n)=5n-1$を用いて、漸化式は

$a_{n+1}-f(n+1)=3(a_n-f(n))$

と変形できる．数列$\{a_n-f(n)\}$は

初項 $a_1-f(1)=8-(5-1)=4$，

公比3の等比数列

$\therefore\ a_n-f(n)=4\cdot 3^{n-1}$

$\therefore\ a_n=4\cdot 3^{n-1}+f(n)=4\cdot 3^{n-1}+5n-1$

5．$a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=4n$で定義されている数列$\{a_n\}$の一般項a_nを推測し、それが正しいことを示せ。

$n=1$を代入して．$a_2+a_1=4$．　$\therefore\ a_2=4-1=3$．

$n=2$　〃　$a_3+a_2=8$　$\therefore\ a_3=8-3=5$

$n=3$　〃　$a_4+a_3=12$　$\therefore\ a_4=12-5=7$

よって $a_n=2n-1$と推測できる．(A)とおく．

① $n=1$の時．

$2\times 1-1=1=a_1$となり成り立つ．

② $n=k$の時成り立つと仮定すると $a_k=2k-1$

漸化式より

$a_{k+1}=4k-a_k$

$=4k-(2k-1)$

$=2k+1$

$=2(k+1)-1$

で$n=k+1$の時も成り立つ

①②よりすべてのnについて(A)が成り立つ

6．数列 $\frac{1}{1}\Big|\frac{1}{2},\frac{2}{2}\Big|\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3}\Big|\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4}\Big|\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{5}{5}\Big|\frac{1}{6},\cdots\cdots$ において

1群　2群　3群　4群　5群

(1) $\frac{10}{45}$は初項から数えて第何項目か求めよ。

$\frac{10}{45}$は第45群の10番目．

第n群にはn個の項を含むので $\frac{10}{45}$は

$\sum_{k=1}^{44}k+10=\frac{1}{2}\cdot 44\cdot 45+10=990+10=1000$項

(2) 第４００項を求めよ。

第400項が第n群に入るとすると

1群から$n-1$群までの項数は

$\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{2}(n-1)n$

よって $\frac{1}{2}(n-1)n<400$ を満たす最大のnは

$(n-1)n<800$ で

$27\times 28=756$，$28\times 29=812$

より $n=28$．よって 400項は第28群．

27群の最後は

$\frac{1}{2}\times 27\times 28=378$項

より．400項は

28群の22番目

$\therefore\ \frac{22}{28}$

(3) 初項からの和が初めて２００を超えるのは第何項か求めよ。

第n群のすべての項の和は $\frac{1}{2}\times n\left(\frac{1}{n}+\frac{n}{n}\right)=\frac{1}{2}(n+1)$

第n群で初項からの和が200を超えるとすると nは

$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}(k+1)<200$ を満たす最大の整数

$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)\right\}<200$

$\frac{1}{4}n(n+1)-\frac{1}{2}<200$

$\therefore\ n(n+1)<802$

$27\times 28=756$，$28\times 29=812$

より $n=27$

ゆえに第27群の中で和は200を超える

第26群までの和は

$\sum_{k=1}^{26}\frac{1}{2}(k+1)=\frac{377}{2}$ より

27群のk番目で残りの $200-\frac{377}{2}=\frac{23}{2}$

を超えるとすると

$\frac{1}{2}k\left(\frac{1}{27}+\frac{k}{27}\right)>\frac{23}{2}$

$\therefore\ k(k+1)>621$．

$24\times 25=600$，$25\times 26=650$

よって $k=25$．

ゆえに第27群の25番目で和が200を超える。これは初項から数えて

$\sum_{k=1}^{26}k+25=376$項