１．等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$a_{10}=1$, $S_{20}=0$ であるとき，以下の問いに答えよ。

⑴ 一般項 a_n を求めよ。

⑵ $\displaystyle\sum_{k=1}^{30}|a_k|$ の値を求めよ。

２．数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n(n+1)(n+2)$ で与えられている。このとき，以下の問いに答えよ。

⑴ 一般項 a_n を求めよ。

⑵ $\displaystyle\sum_{k=1}^{22}\frac{1}{a_k}$ の値を求めよ。

３．数列 $\{a_n\}$: 1 , $1+2$, $1+2+2^2$, $1+2+2^2+2^3$, …… について，以下の問いに答えよ。

⑴ 一般項 a_n を求めよ。

⑵ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k$ を n を用いて表せ。

４．$a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n+2^n-1$ によって定義された数列 $\{a_n\}$ において，以下の問いに答えよ。

⑴ $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)+2^n$ を満たす定数 α を求めよ。

⑵ 一般項 a_n を求めよ。

５．n を５以上の自然数とする。このとき，不等式 $2^n>n^2$ が成り立つことを示せ。

６．数列 $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{1}{6}$, …… について，以下の問いに答えよ。

⑴ $\frac{36}{39}$ は初項から数えて第何項目か求めよ。

⑵ 初項からの和が初めて１２８を超えるのは第何項か求めよ。

１．等差数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとするとき、$a_{10}=1$, $S_{20}=0$である。

(1) 一般項a_nを求めよ。

(5)

$$a_{10}=a+9d=1$$
$$S_{20}=\frac{1}{2}\cdot 20(2a+19d)=0$$
$$\therefore\ a=19,\ d=-2$$
$$\therefore\ a_n=19+(n-1)(-2)=-2n+21$$

(2) $\sum_{k=1}^{30}|a_k|$の値を求めよ。

$a_k=-2k+21\geqq 0 \iff k\leqq \frac{21}{2}=10.5$ より

$$|a_k|=\begin{cases}a_k & (1\leqq k\leqq 10)\\ -a_k & (11\leqq k\leqq 30)\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(-2k+21)=-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+21n=n(20-n)$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{30}|a_k|=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=11}^{30}(-a_k)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}a_k-\left(\sum_{k=1}^{30}a_k-\sum_{k=1}^{10}a_k\right)$$
$$=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{30}a_k$$
$$=2\times 10(20-10)-30(20-30)=200+300=500$$

(10)

２．数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nが$S_n=n(n+1)(n+2)$で与えられている。

(1) 一般項a_nを求めよ。

(10)

$n\geqq 2$のとき、

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)$$
$$=n(n+1)\{(n+2)-(n-1)\}$$
$$=3n(n+1)$$

$n=1$のとき、$a_1=S_1=1\times 2\times 3=6$

$n=1$を代入するとa_1に一致する。

$$\therefore\ a_n=3n(n+1)$$

(2) $\sum_{k=1}^{22}\frac{1}{a_k}$の値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{22}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{22}\frac{1}{3k(k+1)}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{22}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{22}}-\frac{1}{23}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{23}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{22}{23}=\frac{22}{69}$$

(10)

数列$\{a_n\}$：1, $1+2$, $1+2+2^2$, $1+2+2^2+2^3$, ……において

(1) 一般項a_nを求めよ。

(10)

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}ka_k$をnを用いて表せ。

$$\sum_{k=1}^{n}ka_k=\sum_{k=1}^{n}k(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}k2^k-\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}k2^k-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$S=\sum_{k=1}^{n}k2^k$とおくと、

$$S=1\times 2+2\times 2^2+\cdots+n\times 2^n$$
$$2S=\qquad 1\times 2^2+\cdots+(n-1)2^n+n2^{n+1}\quad (-$$
$$-S=1\times 2+1\times 2^2+\cdots+1\times 2^n-n2^{n+1}$$
$$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n2^{n+1}=(1-n)2^{n+1}-2$$

(10)

$$\therefore\ S=(n-1)2^{n+1}+2$$

以上より

$$\sum_{k=1}^{n}ka_k=(n-1)2^{n+1}+2-\frac{1}{2}n(n+1)$$

４．$a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n+2^n-1$によって定義された数列$\{a_n\}$において

(1) $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)+2^n$を満たす$\alpha$を求めよ。

(5)

$a_{n+1}=2a_n+2^n-\alpha$ より

$$-\alpha=-1\qquad\therefore\ \alpha=1$$

(2) 一般項a_nを求めよ。

(1)より

$$a_{n+1}-1=2(a_n-1)+2^n$$

$b_n=a_n-1$とおくと、

$$b_{n+1}=2b_n+2^n,\ b_1=a_1-1=2.$$

(10)

両辺を2^{n+1}で割ると、

$$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{2b_n}{2^{n+1}}+\frac{2^n}{2^{n+1}}\qquad\therefore\ \frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{b_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

$\frac{b_n}{2^n}=c_n$とおくと、$c_1=\frac{b_1}{2}=1$, $c_{n+1}=c_n+\frac{1}{2}$

$$\therefore\ c_n=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2}$$
$$b_n=2^nc_n=(n+1)2^{n-1}$$
$$\therefore\ a_n=(n+1)2^{n-1}+1$$

．nを５以上の自然数とする。このとき、不等式$2^n>n^2$が成り立つことを示せ。 (A)

(10)

① $n=5$の時、

(左辺)$=2^5=32$, (右辺)$=5^2=25$.

よって$n=1$の時にも成り立つ.

② $n=k$の時に成り立つと仮定すると、$2^k>k^2$が成り立つ $(k\geqq 5)$

ここで

$$2^{k+1}-(k+1)^2=2\cdot 2^k-(k+1)^2$$
$$>2k^2-(k+1)^2$$
$$=k^2-2k-1$$
$$=(k-1)^2-2$$

$k\geqq 5$より $(k-1)^2-2\geqq (5-1)^2-2$.

よって$n=k+1$の時も成り立つ.

①②より、$n\geqq 5$の時(A)が成り立つ.

６．数列 $\frac{1}{1}\,\Big|\,\frac{1}{2},\frac{2}{2}\,\Big|\,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3}\,\Big|\,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4}\,\Big|\,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{5}{5}\,\Big|\,\frac{1}{6},$ ……において

(1) $\frac{36}{39}$は初項から数えて第何項目か求めよ。

(10)

$\frac{36}{39}$は第39群の36番目.

第n群にはn個の項があるので

$$\sum_{k=1}^{38}k+36=\frac{1}{2}\cdot 38\cdot 39+36$$
$$=741+36=777\text{項}$$

(2) 初項からの和が初めて１２８を超えるのは第何項か求めよ。

第n群のすべての項の和は $\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{n}+\frac{n}{n}\right)=\frac{n+1}{2}$

よって、第n群の中で和が128を超えるとすると、nは

$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{2}<128$ を満たす最大の整数

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)\right\}=\frac{1}{4}n(n+1)-\frac{1}{2}$$

よって $\frac{1}{4}n(n+1)-\frac{1}{2}<128 \iff n(n+1)<514$.

(10)

$22\times 23=506$, $23\times 24=552$ より $n=22$.

第21群までの和は $\frac{1}{4}\cdot 22\times 23-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\cdot 506-\frac{1}{2}=126$

よって第22群の初めからの和が2を超えるのは

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{22}=\frac{1}{22}\cdot\frac{1}{2}k(k+1)>2\qquad\therefore\ k(k+1)>88.$$

よって $k=9$

第22群の9番目は $\sum_{k=1}^{21}k+9=\frac{1}{2}\cdot 21\cdot 22+9=240$ より 第240項