第５回定期考査（数列A）Ｈ３１．３．６　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の数列はどのような規則で作られているかを考え，その規則に基づいて一般項 a_n を n の式で表せ。

$-4,\ 8,\ -12,\ 16,\ -20,\ 24,\ \cdots\cdots$

$\boxed{2}$ 初項 3，公差 2 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 10 項を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の等差数列の和 S を求めよ。5，9，13，……，101

$\boxed{4}$ 次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。2，-6，18，-54，……

$\boxed{5}$ 次の和を求めよ。　$\displaystyle\sum_{k=1}^{25} k^2$

$\boxed{6}$ 次の和を求めよ。　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k+4)$

$\boxed{7}$ 次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 4^{k-1}$　　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3^k}$

$\boxed{8}$ 階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　3，6，11，18，27，……

$\boxed{9}$ 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2+4n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{10}$ 数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。　$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\dfrac{1}{2}n(3n-1)$

第５回定期考査（数列B）Ｈ３１．３．６　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 初項が 30，公差が -4 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 第何項が初めて負の数になるか。

(2) 初項から第何項までの和が最大であるか。

$\boxed{2}$ 等差数列 19，23，27，…… について，第 10 項から第 20 項までの和を求めよ。

$\boxed{3}$ a_1，a_2，a_3，a_4，…… は等比数列であり，$a_1+a_2=4$，$a_3+a_4=36$ である。この等比数列の一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

1^2，1^2+2^2，$1^2+2^2+3^2$，$1^2+2^2+3^2+4^2$，……

$\boxed{5}$ 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。1，2，5，14，41，……

$\boxed{6}$ 次の和 S を求めよ。　$S=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\frac{1}{10\cdot13}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$\boxed{7}$ 次の和 S を求めよ。$S=2\cdot1+4\cdot3+6\cdot3^2+\cdots\cdots+2n\cdot3^{n-1}$

$\boxed{8}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=3$，$a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$

第５回定期考査（数列A）H３１．３．６　(不備は△-1)　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の数列はどのような規則で作られているかを考え，その規則に基づいて一般項 a_n を n の式で表せ。

$-4,\ 8,\ -12,\ 16,\ -20,\ 24,\ \cdots\cdots$

解答　$a_n=(-1)^n\cdot 4n$　9

各項の符号を除いた数列

$4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ \cdots\cdots$

は，$4\cdot1,\ 4\cdot2,\ 4\cdot3,\ 4\cdot4,\ 4\cdot5,\ 4\cdot6,\ \cdots\cdots$ と考えられるから，その第 n 項は $4n$

符号は $-,\ +,\ -,\ +,\ -,\ +,\ \cdots\cdots$ と交互に並ぶから，第 n 項の符号は $(-1)^n$

よって，一般項は　$a_n=(-1)^n\cdot 4n$

$\boxed{2}$ 初項 3，公差 2 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 10 項を求めよ。

解答　$a_n=2n+1$，$a_{10}=21$　3　3

$a_n=3+(n-1)\cdot 2$　△2

すなわち　$a_n=2n+1$

第 10 項は　$a_{10}=2\cdot10+1=21$

$\boxed{3}$ 次の等差数列の和 S を求めよ。5，9，13，……，101

解答　1325　4

この等差数列の初項は 5，公差は 4 である。

末項が 101 であるから，項数を n とすると　$5+(n-1)\cdot4=101$

これを解くと　$n=25$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot25(5+101)=1325$

$\boxed{4}$ 次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。2，-6，18，-54，……

解答　$a_n=2(-3)^{n-1}$　3

初項 2，公比 -3 の等比数列であるから

$a_n=2(-3)^{n-1}$

$\boxed{5}$ 次の和を求めよ。　$\displaystyle\sum_{k=1}^{25}k^2$

解答　5525　3

$\displaystyle\sum_{k=1}^{25}k^2=\frac{1}{6}\cdot25(25+1)(2\cdot25+1)=5525$

$\boxed{6}$ 次の和を求めよ。　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k+4)$

解答　$\dfrac{1}{2}n(5n+13)$　4

与式 $=\displaystyle 5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4=5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+4n=\frac{1}{2}n(5n+13)$

因数分解していない　△3

(分数が先頭に来ない　△3

$\frac{5}{2}n^2+n$ など

$\sum_{k=1}^{n}4=4$ ダメ。　分配法則ミス ダメ

$\boxed{7}$ 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3\cdot4^{k-1}$　　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3^k}$

解答　(1)　4^n-1　3　(1)　$\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$　3

(1)　与式 $=\dfrac{3(4^n-1)}{4-1}=4^n-1$

(2)　与式 $=\dfrac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

項数が n-1 ダメ

$\boxed{8}$ 階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　3，6，11，18，27，……

解答　$a_n=n^2+2$　6

この数列の階差数列は　△2

$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots\cdots$

その一般項を b_n とすると，$b_n=2n+1$ である。

よって，$n\geqq2$ のとき　なければ △1

$\displaystyle a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=3+2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}1$

$\displaystyle =3+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)$　△2

すなわち　$a_n=n^2+2$

初項は $a_1=3$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=n^2+2$

$\boxed{9}$ 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2+4n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=2n+3$　6

初項 a_1 は　$a_1=S_1=1^2+4\cdot1=5$　……①　△2

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+4n)-\{(n-1)^2+4(n-1)\}$

すなわち　$a_n=2n+3$　△2

① より $a_1=5$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n+3$

$n\geqq2$，$n=1$　なければ △1

$\boxed{10}$ 数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。　$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\dfrac{1}{2}n(3n-1)$

証明すべき等式を (A) とする。

[1]　$n=1$ のとき

左辺 $=1$，

右辺 $=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot(3\cdot1-1)=1$

よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ。　△3

$1+4+7+\cdots+(3\cdot1-2)=1$ という書き方は良くない。

[2]　$n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$1+4+7+\cdots\cdots+(3k-2)=\dfrac{1}{2}k(3k-1)$

が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときの (A) の左辺は

$1+4+7+\cdots\cdots+(3k-2)+\{3(k+1)-2\}$

$=\dfrac{1}{2}k(3k-1)+(3k+1)$　△3

$=\dfrac{1}{2}\{k(3k-1)+2(3k+1)\}$

$=\dfrac{1}{2}(3k^2+5k+2)=\dfrac{1}{2}(k+1)(3k+2)$

$n=k+1$ のときの (A) の右辺は

$\dfrac{1}{2}(k+1)\{3(k+1)-1\}=\dfrac{1}{2}(k+1)(3k+2)$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ。　8

Σの計算をしたら帰納法ではなくなります。

/50

第５回定期考査（数列B）Ｈ３１．３．６　（不備は −1，$\{a_n\}=3^{n-1}$，$\Sigma\,2k^3+3k^2+k$ など）　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1 初項が 30，公差が −4 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 第何項が初めて負の数になるか。

(2) 初項から第何項までの和が最大であるか。

解答 (1) 第 9 項　4　(2) 第 8 項　4

(1) a_n の一般項は　$a_n=30+(n-1)\cdot(-4)$

すなわち　$a_n=-4n+34$　2

$a_n<0$ を満たす最小の自然数 n を求めればよい。

$-4n+34<0$ より　$n>\dfrac{34}{4}=8.5$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=9$

よって，この数列で初めて負の数になる項は　第 9 項

(2) (1) から，この数列の第 9 項からはすべて負の数になるので，初項から第 8 項までの和が最大となる。

$S_n=-2n^2+32n$　2

$=-2(n-8)^2+128$

128　2

2 等差数列 19，23，27，…… について，第 10 項から第 20 項までの和を求めよ。

解答 825　6

この等差数列の初項は 19，公差は 4 であるから，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot19+(n-1)\cdot4\}=n(2n+17)$

求める和 S は $S_{20}-S_9$ であるから　4　← $S_{20}-S_{10}$ ダメし

$S=S_{20}-S_9=20(2\cdot20+17)-9(2\cdot9+17)=825$

別解 この等差数列の初項は 19，公差は 4 であるから

第 10 項は　$19+(10-1)\cdot4=55$

第 20 項は　$19+(20-1)\cdot4=95$　10のもの答し

第 10 項から第 20 項までの項数は 11 であるから，求める和 S は，初項 55，末項 95，項数 11 の等差数列の和と等しい。

よって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot11(55+95)=825$

3 a_1，a_2，a_3，a_4，…… は等比数列であり，$a_1+a_2=4$，$a_3+a_4=36$ である。この等比数列の一般項 a_n を求めよ。

$(-2)(-3)^{n-1}$

が，これ不安

解答 $a_n=3^{n-1}$　または　$a_n=-2(-3)^{n-1}$　6

初項を a，公比を r とすると　$a_n=ar^{n-1}$

$a_1+a_2=4$ であるから　$a+ar=4$

よって　$a(1+r)=4$　……①

$a_3+a_4=36$ であるから　$ar^2+ar^3=36$

よって　$ar^2(1+r)=36$　……②

立式していないものはダメ

①，②より　$r^2=9$

これを解くと　$r=\pm3$　4（各2）

① から　$r=3$ のとき　$a=1$

$r=-3$ のとき　$a=-2$

したがって，一般項は　$a_n=3^{n-1}$　または　$a_n=-2(-3)^{n-1}$

$a_n=1\cdot3^{n-1}$　−1

4 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

1^2，1^2+2^2，$1^2+2^2+3^2$，$1^2+2^2+3^2+4^2$，……

解答 $\dfrac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$　6　　$S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2$ はダメ

与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。第 k 項は　$a_k=\sum_{m=1}^{k}m^2=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$　2

よって，求める和 S_n は

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)=\dfrac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)$　← $2n^3+3n^2+n$ ダメし

$=\dfrac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3+\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\dfrac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k$

$=\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{12}n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}=\dfrac{1}{12}n(n+1)(n^2+3n+2)$　2

$=\dfrac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

5 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。1，2，5，14，41，……

解答 $a_n=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$　6　　$1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}$ ダメし．

この数列の階差数列は　2

1，3，9，27，……

その一般項を b_n とすると，$b_n=3^{n-1}$ である。

よって，$n\geqq2$ のとき　← なければ −1

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=1+\dfrac{1\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1}$　2

すなわち　$a_n=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$

初項は $a_1=1$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$

6 次の和 S を求めよ。　$S=\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\dfrac{1}{10\cdot13}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

解答 $\dfrac{n}{3n+1}$　6

$S=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}\right)$

$+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{13}\right)+\cdots\cdots+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)=\dfrac{n}{3n+1}$

4

7 次の和 S を求めよ。$S=2\cdot1+4\cdot3+6\cdot3^2+\cdots\cdots+2n\cdot3^{n-1}$

解答 $\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\cdot3^n+\dfrac{1}{2}$　6

$S=2\cdot1+4\cdot3+6\cdot3^2+\cdots\cdots+2n\cdot3^{n-1}$

両辺に 3 を掛けると

$3S=\quad2\cdot3+4\cdot3^2+\cdots\cdots+(2n-2)\cdot3^{n-1}+2n\cdot3^n$

辺々引くと　← プラスの答ダメし．

$S-3S=2+2\cdot3+2\cdot3^2+\cdots\cdots+2\cdot3^{n-1}-2n\cdot3^n$

よって　$-2S=\dfrac{2(3^n-1)}{3-1}-2n\cdot3^n$　4

$=3^n-1-2n\cdot3^n=(1-2n)\cdot3^n-1$

したがって　$S=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\cdot3^n+\dfrac{1}{2}$

3^n をまとめていない　−1

7 は出来が良くない．

8 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=3$，$a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$

解答 $a_n=3^n(2^n-1)$　6

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと条件より　$b_1=\dfrac{a_1}{3^1}=\dfrac{3}{3}=1$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式の両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=2\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+1$

よって　$b_{n+1}=2b_n+1$　2

また，この式を変形すると　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

したがって，数列 $\{b_n+1\}$ は，初項 $b_1+1=2$，公比 2 の等比数列であるから

$b_n+1=2\cdot2^{n-1}$

すなわち　$b_n=2^n-1$　1

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ から　$a_n=3^n\cdot b_n$

よって　$a_n=3^n(2^n-1)$

オススメ．

別解

問題文の漸化式が　$a_{n+1}-c\cdot3^{n+1}=6(a_n-c\cdot3^n)$ と変形できたとする。

展開して　$a_{n+1}-3c\cdot3^n=6a_n-6c\cdot3^n$　より　$a_{n+1}=6a_n-3c\cdot3^n$

よって問題文の漸化式と比較して　$-3c\cdot3^n=3^{n+1}$　となればいい。つまり　$c=-1$

ゆえに問題文の漸化式は　$a_{n+1}+3^{n+1}=6(a_n+3^n)$　と変形できるので

$b_n=a_n+3^n$ とおくと $a_{n+1}+3^{n+1}=b_{n+1}$ となるから　$b_{n+1}=6b_n$

また，$b_1=a_1+3^1=3+3=6$ より，数列 $\{b_n\}$ は初項6，公比6の等比数列

ゆえに $b_n=6\cdot6^{n-1}=6^n$ であるから　$a_n+3^n=6^n$　つまり　$a_n=6^n-3^n$

参考

$a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$　より　$3^{n+1}=a_{n+1}-6a_n$…①　と変形する。番号を 1 つ増やすと

$3^{n+2}=a_{n+2}-6a_{n+1}$　となる。この式を $3\cdot3^{n+1}=a_{n+2}-6a_{n+1}$ として①を代入すると

$3(a_{n+1}-6a_n)=a_{n+2}-6a_n$　つまり　$a_{n+2}-9a_{n+1}+18a_n=0$ が成り立つから，

隣接 3 項間漸化式として解いてもよい。

/50