第５回定期考査（数列）Ｈ２５．３．６　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

１．次の等差数列の公差を求めよ。また，$\boxed{}$ に適する数を求めよ。

(1)　2，5，8，$\boxed{}$，$\boxed{}$，……　　(2)　9，$\boxed{}$，5，3，$\boxed{}$，……

２．第 3 項が 10，第 6 項が 22 である等差数列の初項は ${}^{ア}\boxed{}$，公差は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

また，第 30 項は ${}^{ウ}\boxed{}$，50 は第 ${}^{エ}\boxed{}$ 項である。

３．次のような等差数列の和を求めよ。

(1)　初項 8，末項 84，項数 20　　(2)　初項 80，末項 0，項数 17

４．次の等比数列の公比を求めよ。また，$\boxed{}$ に適する数を求めよ。

(1)　2，6，18，$\boxed{}$，$\boxed{}$，……　　(2)　$\boxed{}$，2，$-2\sqrt{2}$，$\boxed{}$，……

５．第 5 項が -48，第 7 項が -192 である等比数列の一般項を求めよ。

６．次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　初項 10，公比 -2　　(2)　1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，……

７．次の和を求めよ。　$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

８．次の和を求めよ。

(1)　$\sum_{k=1}^{15} k^2$　　(2)　$\sum_{k=1}^{n} (2k+3)$　　(3)　$\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k-5)$

９．和 $S_n=1+4\cdot 2+7\cdot 2^2+10\cdot 2^3+\cdots\cdots+(3n-2)\cdot 2^{n-1}$ を求めよ。

10. 数列 1，2，5，14，41，…… の一般項 a_n を階差数列を用いて求めよ。

11. 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2-4n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

12. 偶数の数列 2，4，6，…… を次のように，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

$\{2\}$，$\{4,\ 6\}$，$\{8,\ 10,\ 12\}$，$\{14,\ 16,\ 18,\ 20\}$，……

(1)　第 n 番目の群の最後の数を求めよ。

(2)　第 n 番目の群に入る偶数の和を求めよ。

13. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2$　　(2)　$a_1=-5$，$a_{n+1}=3a_n$

14. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+n+2$　　(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n-2$

15. n が自然数のとき，$4n^3-n$ は 3 の倍数であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

第５回定期考査（数列）Ｈ２５．３．６　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

1． 次の等差数列の公差を求めよ。また，$\boxed{}$ に適する数を求めよ。

(1)　2，5，8，$\boxed{}$，$\boxed{}$，……　　　(2)　9，$\boxed{}$，5，3，$\boxed{}$，……

解答　(1)　公差 3，$\boxed{}$ に適する数：11，14

(2)　公差 -2，$\boxed{}$ に適する数：7，1

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。

(1)　公差は　$5-2=3$

よって　$a_4=8+3=11$，$a_5=11+3=14$

(2)　公差は　$3-5=-2$

よって　$a_2=9+(-2)=7$，$a_5=3+(-2)=1$

2． 第 3 項が 10，第 6 項が 22 である等差数列の初項は ア$\boxed{}$，公差は イ$\boxed{}$ である。

また，第 30 項は ウ$\boxed{}$，50 は第 エ$\boxed{}$ 項である。

解答　(ア)　2　　(イ)　4　　(ウ)　118　　(エ)　13

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その初項を a，公差を d とする。

$a_3=10$ であるから　$a+2d=10$　…… ①

$a_6=22$ であるから　$a+5d=22$　…… ②

①，② を解いて　$a=2$，$d=4$

よって，初項は ア2，公差は イ4 である。

また，一般項 a_n は　$a_n=2+(n-1)\times4=4n-2$

したがって　$a_{30}=4\cdot30-2=$ ウ118

更に，$a_n=50$ とすると　$4n-2=50$　　よって　$n=13$

したがって，50 は 第 エ13 項 である。

3． 次のような等差数列の和を求めよ。

(1)　初項 8，末項 84，項数 20　　　(2)　初項 80，末項 0，項数 17

解答　(1)　920　　(2)　680

解説

(1)　$\dfrac{1}{2}\cdot20(8+84)=920$

(2)　$\dfrac{1}{2}\cdot17(80+0)=680$

4． 次の等比数列の公比を求めよ。また，$\boxed{}$ に適する数を求めよ。

(1)　2，6，18，$\boxed{}$，$\boxed{}$，……　　　(2)　$\boxed{}$，2，$-2\sqrt{2}$，$\boxed{}$，……

解答　(1)　公比 3，$\boxed{}$ に適する数：54，162

(2)　公比 $-\sqrt{2}$，$\boxed{}$ に適する数：$-\sqrt{2}$，4

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。

(1)　公比は　$\dfrac{6}{2}=3$

よって　$a_4=18\times3=54$，$a_5=54\times3=162$

(2)　公比は　$\dfrac{-2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

よって　$a_1=\dfrac{2}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$，$a_4=-2\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=4$

5． 第 5 項が -48，第 7 項が -192 である等比数列の一般項を求めよ。

解答　$-3\cdot2^{n-1}$ または $-3(-2)^{n-1}$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その初項を a，公比を r とする。

$a_5=-48$ であるから　$ar^4=-48$　…… ①

$a_7=-192$ であるから　$ar^6=-192$　…… ②

② から　$ar^4\cdot r^2=-192$　　① を代入して　$-48r^2=-192$

よって　$r^2=4$　　したがって　$r=\pm2$

① から　$r=2$ のとき　$a=-3$　　$r=-2$ のとき　$a=-3$

よって，求める一般項は　$-3\cdot2^{n-1}$ または $-3(-2)^{n-1}$

6． 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　初項 10，公比 -2　　　(2)　1，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，……

解答　(1)　$S_n=\dfrac{10}{3}\{1-(-2)^n\}$　　(2)　$S_n=\dfrac{2}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

解説

(1)　$S_n=\dfrac{10\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\dfrac{10}{3}\{1-(-2)^n\}$

(2)　初項は 1，公比は $-\dfrac{1}{2}\div1=-\dfrac{1}{2}$ であるから

$$S_n=\frac{1\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

7． 次の和を求めよ。　$\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

解答　$\dfrac{n}{3n+1}$

解説

これは，第 k 項が $\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

ここで，$\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3k-2}-\dfrac{1}{3k+1}\right)$ であるから，求める和は

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}$$

8． 次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{15}k^2$　　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$　　　(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$

解答　(1)　1240　　(2)　$n(n+4)$　　(3)　$\dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$

解説

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{15}k^2=\frac{1}{6}\cdot15(15+1)(2\cdot15+1)=1240$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=2\sum_{k=1}^{n}k+3\sum_{k=1}^{n}1=2\times\frac{1}{2}n(n+1)+3\times n$

$=n^2+4n=n(n+4)$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-6k+5)=\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+5\sum_{k=1}^{n}1$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\times\dfrac{1}{2}n(n+1)+5\times n$

$=\dfrac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-18(n+1)+30\}$

$=\dfrac{1}{6}n(2n^2-15n+13)=\dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$

9． 和 $S_n=1+4\cdot2+7\cdot2^2+10\cdot2^3+\cdots\cdots+(3n-2)\cdot2^{n-1}$ を求めよ。

解答　$S_n=(3n-5)\cdot2^n+5$

解説

$S_n=1+4\cdot2+7\cdot2^2+\cdots\cdots+(3n-2)\cdot2^{n-1}$

$2S_n=\qquad 2+4\cdot2^2+\cdots\cdots+(3n-5)\cdot2^{n-1}+(3n-2)\cdot2^n$

の辺々を引くと

$S_n-2S_n=1+3\cdot2+3\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots\cdots+3\cdot2^{n-1}-(3n-2)\cdot2^n$

よって　$-S_n=1+3(2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n-1})-(3n-2)\cdot2^n$

$=1+3\cdot\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(3n-2)\cdot2^n=(5-3n)\cdot2^n-5$

したがって　$S_n=(3n-5)\cdot2^n+5$

10． 数列 1，2，5，14，41，…… の一般項 a_n を階差数列を用いて求めよ。

解答　$a_n=\dfrac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

解説

この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は　1，3，9，27，……

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 3 の等比数列であるから　$b_n=1\cdot3^{n-1}$

ゆえに，$n\geqq2$ のとき　$a_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}1\cdot3^{k-1}=1+\frac{1\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

初項は $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\dfrac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

11. 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2-4n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=2n-5$

解説

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-4n)-\{(n-1)^2-4(n-1)\}$

$=2n-5$

初項は　$a_1=S_1=1^2-4\cdot1=-3$

よって，$a_n=2n-5$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=2n-5$

12. 偶数の数列 2，4，6，…… を次のように，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

$\{2\}$，$\{4,\ 6\}$，$\{8,\ 10,\ 12\}$，$\{14,\ 16,\ 18,\ 20\}$，……

(1)　第 n 番目の群の最後の数を求めよ。

(2)　第 n 番目の群に入る偶数の和を求めよ。

解答　(1)　$n(n+1)$　(2)　$n(n^2+1)$

解説

(1)　第 k 番目の群に入る偶数は k 個であるから，第 1 番目の群から第 n 番目の群までに入る偶数は　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ (個)

よって，第 n 番目の群の最後の数は，偶数の数列 2，4，6，…… の第 $\dfrac{1}{2}n(n+1)$ 項であるから　$2\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)=n(n+1)$

(2)　(1) の結果から，第 n 番目の群の最初の数は n^2-n+2 である。

よって，求める和は初項 n^2-n+2，公差2，項数 n の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}n\{2(n^2-n+2)+(n-1)\times2\}=n(n^2+1)$$

13. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2$　　(2)　$a_1=-5$，$a_{n+1}=3a_n$

解答　(1)　$a_n=2n+1$　(2)　$a_n=-5\cdot3^{n-1}$

解説

(1)　数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公差 2 の等差数列であるから

$a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$

(2)　数列 $\{a_n\}$ は初項 -5，公比 3 の等比数列であるから

$a_n=-5\cdot3^{n-1}$

14. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+n+2$　　(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n-2$

解答　(1)　$a_n=\dfrac{1}{2}n(n+3)$　(2)　$a_n=3^{n-1}+1$

解説

(1)　漸化式から，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $n+2$ であるから

$n\geqq2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)=2+\frac{1}{2}n(n-1)+2(n-1)$

$=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{3}{2}n=\dfrac{1}{2}n(n+3)$

初項は $a_1=2$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\dfrac{1}{2}n(n+3)$

(2)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

$a_n-1=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は

$b_1=a_1-1=2-1=1$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=1\cdot3^{n-1}=3^{n-1}$

したがって　$a_n=b_n+1=3^{n-1}+1$

15. n が自然数のとき，$4n^3-n$ は 3 の倍数であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

解答　略

解説

[1]　$n=1$ のとき　$4\cdot1^3-1=3$

よって，$n=1$ のとき，$4n^3-n$ は 3 の倍数である。

[2]　$n=k$ のとき $4n^3-n$ は 3 の倍数であると仮定する。

このとき，整数 m を用いて $4k^3-k=3m$ と表され　$4k^3=3m+k$

$n=k+1$ のときを考えると

$4(k+1)^3-(k+1)=4k^3+12k^2+11k+3$

$=(3m+k)+12k^2+11k+3$

$=3(m+4k^2+4k+1)$

よって，$n=k+1$ のときも $4n^3-n$ は 3 の倍数である。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について $4n^3-n$ は 3 の倍数である。