数学演習（数列）Ｈ２４．１１．１９　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１. 次の和を求めよ。　$\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$

２. 和 $1\cdot1\cdot3+2\cdot3\cdot5+3\cdot5\cdot7+\cdots\cdots+n(2n-1)(2n+1)$ を求めよ。

３. 次の和を求めよ。　$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

４. 次の和 S を求めよ。

$$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1}$$

５. 次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ \cdots\cdots$

６. 次の数列の一般項と，初項から第 n 項までの和をそれぞれ求めよ。

$0,\ 5,\ 16,\ 33,\ 56,\ \cdots\cdots$

7．次の条件によって定まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}-a_n=1$　　(2)　$a_1=3$，$2a_{n+1}=a_n$

8．次の条件によって定まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+5^n$

9．次の条件によって定まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$　　(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n+1$

10．nが自然数のとき，次の等式を数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

11．nが自然数のとき，$4n^3-n$は3の倍数であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

1．次の和を求めよ。　$\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$

解答　$\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-6k+5)=\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}5$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\times\frac{1}{2}n(n+1)+5n$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{18}{6}n(n+1)+\frac{30}{6}n$$
$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-18(n+1)+30\}$$
$$=\frac{1}{6}n(2n^2-15n+13)=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$$

2．和 $1\cdot1\cdot3+2\cdot3\cdot5+3\cdot5\cdot7+\cdots\cdots+n(2n-1)(2n+1)$ を求めよ。

解答　$\frac{1}{2}n(n+1)(2n^2+2n-1)$

これは，第 k 項が $k(2k-1)(2k+1)$ である数列の初項から第 n 項までの和である。
よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}(4k^3-k)=4\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=4\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)\{2n(n+1)-1\}$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n^2+2n-1)$$

3．次の和を求めよ。　$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

解答　$\frac{n}{3n+1}$

これは，第 k 項が $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

ここで，$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$ であるから，求める和は

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}$$

4．次の和 S を求めよ。

$$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1}$$

解答　$\frac{(2n-1)\cdot3^n+1}{4}$

$$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1}$$
$$3S=\qquad 1\cdot3+2\cdot3^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot3^{n-1}+n\cdot3^n$$

辺々を引くと　$S-3S=1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-1}-n\cdot3^n$

よって　$-2S=\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}-n\cdot3^n=\frac{3^n-1}{2}-n\cdot3^n=\frac{3^n-1-2n\cdot3^n}{2}$

$$=\frac{(1-2n)\cdot3^n-1}{2}$$

したがって　$S=\frac{(2n-1)\cdot3^n+1}{4}$

5．次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ \cdots\cdots$

解答　第 k 項 2^k-1，$S_n=2^{n+1}-n-2$

第 k 項は初項1,公比2，項数 k の等比数列の和より

$$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^k-1)}{2-1}=2^k-1$$

よって　$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1=\frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$

6．次の数列の一般項と，初項から第 n 項までの和をそれぞれ求めよ。

$0,\ 5,\ 16,\ 33,\ 56,\ \cdots\cdots$

解答　一般項 $3n^2-4n+1$，和 $\frac{1}{2}n(n-1)(2n+1)$

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

$5,\ 11,\ 17,\ 23,\ \cdots\cdots$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項5，公差6の等差数列であるから

$$b_n=5+(n-1)\times6=6n-1$$

ゆえに，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}(6k-1)=6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$$
$$=3n^2-4n+1$$

初項は $a_1=0$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=3n^2-4n+1$

また，求める和を S_n とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(3k^2-4k+1)$$
$$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$=\frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1)-4(n+1)+2\}$$
$$=\frac{1}{2}n(2n^2-n-1)$$
$$=\frac{1}{2}n(n-1)(2n+1)$$

7．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3,\ a_{n+1}-a_n=1$　　　(2)　$a_1=3,\ 2a_{n+1}=a_n$

解答　(1)　$a_n=n+2$　　(2)　$a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(1)　$a_{n+1}-a_n=1$　より　$a_{n+1}=a_n+1$　から

数列 $\{a_n\}$ は初項3，公差1の等差数列である。

したがって，一般項は　$a_n=3+(n-1)\times1$　すなわち　$a_n=n+2$

(2)　$2a_{n+1}=a_n$ から　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項3，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって，一般項は　$a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

8．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+5^n$

解答　$a_n=\frac{1}{4}(5^n+3)$

条件より　$a_{n+1}-a_n=5^n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 5^n であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}5^k=2+\frac{5(5^{n-1}-1)}{5-1}=2+\frac{1}{4}(5^n-5)$$

よって　$a_n=\frac{1}{4}(5^n+3)$

初項は $a_1=2$ であるから，上の a_n は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{1}{4}(5^n+3)$

9．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$　　　(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+1$

解答　(1)　$a_n=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$　(2)　$a_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$

(1)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$

$a_n-3=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列で，初項は

$$b_1=a_1-3=1-3=-2$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+3$ より　$a_n=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

(2)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}+\frac{1}{3}=4\left(a_n+\frac{1}{3}\right)$

$a_n+\dfrac{1}{3}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=4b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 4 の等比数列で，初項は

$$b_1=a_1+\frac{1}{3}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　　$b_n=\dfrac{4}{3}\cdot 4^{n-1}=\dfrac{1}{3}\cdot 4^n$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n-\dfrac{1}{3}$ より　　$a_n=\dfrac{1}{3}(4^n-1)$

10. n が自然数のとき，次の等式を数学的帰納法を用いて証明せよ。

$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\dfrac{1}{2}n(3n-1)$

解答　略

この等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　(左辺)$=1$,　(右辺)$=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$

よって，$n=1$ のとき，① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3k-2)=\frac{1}{2}k(3k-1)$$

であると仮定すると，$n=k+1$ のときの ① の左辺は

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3k-2)+\{3(k+1)-2\}$$
$$=\frac{1}{2}k(3k-1)+\{3(k+1)-2\}=\frac{1}{2}(3k^2+5k+2)=\frac{1}{2}(k+1)(3k+2)$$

よって　　$1+4+7+\cdots\cdots+\{3(k+1)-2\}=\dfrac{1}{2}(k+1)\{3(k+1)-1\}$

ゆえに，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

11. n が自然数のとき，$4n^3-n$ は 3 の倍数であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

解答　略

[1]　$n=1$ のとき　　$4\cdot 1^3-1=3$

よって，$n=1$ のとき，$4n^3-n$ は 3 の倍数である。

[2]　$n=k$ のとき $4n^3-n$ は 3 の倍数であると仮定する。

このとき，整数 m を用いて $4k^3-k=3m$ と表され　　$4k^3=3m+k$

$n=k+1$ のときを考えると

$$4(k+1)^3-(k+1)=4k^3+12k^2+11k+3$$
$$=(3m+k)+12k^2+11k+3$$
$$=3(m+4k^2+4k+1)$$

よって，$n=k+1$ のときも $4n^3-n$ は 3 の倍数である。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について $4n^3-n$ は 3 の倍数である。