

1. 初項が 77, 公差が -3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また, 初項から第何項までの和が最大となるか。

2. 次の和 S を求めよ。
$$S = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 2^2 + \cdots + (3n - 2) \cdot 2^{n-1}$$

3. 次の和を求めよ。
(1) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \cdots + n(n + 3)$

(2) $\frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{3}{8 \cdot 11} + \cdots + \frac{3}{(3n - 1)(3n + 2)}$

4. 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 3n^2 - n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

5. 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
3, 5, 9, 17, 33, 65, $\cdots$

6. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

7. 次のように、奇数の列を 1 個, 2 個, 3 個, $\dots$ の群に分ける。

$$1 \mid 3, 5 \mid 7, 9, 11 \mid 13, 15, 17, 19 \mid \dots$$

(1) 第 n 群の最初の数を求めよ。

(2) 第 n 群に含まれる数の和を求めよ。

(3) 125 は第何群の何番目か。

8. n を自然数とする。数学的帰納法によって、次の不等式を証明せよ。

$$3^n \geq 1 + 2n$$

1. 初項が77, 公差が-3の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また, 初項から第何項までの和が最大となるか。

$$a_n = 77 + (n-1) \times (-3) = -3n + 80$$

$$\therefore a_n = -3n + 80$$

第 n 項が負であるとする。

$$a_n = -3n + 80 < 0 \quad \therefore 3n > 80$$

$$n > \frac{80}{3} = 26.66 \dots$$

よって, 第27項以降はすべて負となるから

第26項までの和が最大となる。

2. 次の和 S を求めよ。

$$S = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 2^2 + \dots + (3n-2) \cdot 2^{n-1}$$

$$\rightarrow 2S = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 + \dots + (3n-5) \cdot 2^{n-1} + (3n-2) \cdot 2^n$$

$$\rightarrow -S = 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{n-1} - (3n-2) \cdot 2^n$$

$$\therefore -S = \underbrace{1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{n-1}}_{\text{初項3, 公差2, 項数 } n} - (3n-2) \cdot 2^n$$

(1) 等比数列

$$-S = -2 + \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} - (3n-2) \cdot 2^n$$

$$-S = -2 + 3 \cdot 2^n - 3 - (3n-2) \cdot 2^n$$

$$-S = -5 + (-3n+5) \cdot 2^n$$

$$S = (3n-5) \cdot 2^n + 5$$

(初項3, 公差2, 項数 n)

(3) (2) と同様

$$-S = 1 + (3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{n-1}) - (3n-2) \cdot 2^n$$

$$= 1 + \frac{3 \cdot 2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - (3n-2) \cdot 2^n$$

$$= 1 + 3 \cdot 2(2^{n-1} - 1) - (3n-2) \cdot 2^n$$

$$= 1 + 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 2 - (3n-2) \cdot 2^n$$

3. 次の和を求めよ。

$$(1) 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + n(n+3)$$

$$= \sum_{k=1}^n k(k+3) = \sum_{k=1}^n (k^2 + 3k)$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{3}{2} n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1) \{ (2n+1) + 9 \}$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+10)$$

$$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+5)$$

$$(2) \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{3}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{3}{(3n-1)(3n+2)}$$

$$\frac{3}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{(3k+2) - (3k-1)}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2}$$

よって

$$(\text{与式}) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) + \dots$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}$$

$$= \frac{3n+2-2}{2(3n+2)}$$

$$= \frac{3n}{2(3n+2)}$$

$$\rightarrow = 1 + 3 \cdot 2^n - 6 - (3n-2) \cdot 2^n$$

$$= -5 + 2^n \{ 3 - (3n-2) \}$$

$$= -5 + 2^n (5-3n)$$

$$(\text{147 181})$$

4. 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 3n^2 - n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = S_1 = 3 - 1 = 2 \quad (\text{2} + 4 + 8 - 2)$$

$$n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = S_n - S_{n-1} \text{ より}$$

$$a_n = 3n^2 - n - \{ 3(n-1)^2 - (n-1) \}$$

$$= 3n^2 - n - (3n^2 - 6n + 3 - n + 1)$$

$$= 6n - 4$$

ここで, $n=1$ とすると $a_1 = 6 - 4 = 2$ となり, かつ

$n=1$ のときも成り立つ $\leftarrow (\text{2} + 4 + 8 - 2)$

よって,

$$a_n = 6n - 4$$

5. 次の数列の一般項を求めよ。

$$3, 5, 9, 17, 33, 65, \dots$$

この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$\{b_n\}: 2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

$$\text{よって } b_n = 2^n \quad (b_k = 2^k)$$

$n \geq 2$ のとき,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

$$= 3 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$$

(初項2, 公差2
の等比数列の
第 $n-1$ 項までの和)

$$= 3 + 2^n - 2 = 2^n + 1$$

ここで, $n=1$ とすると $a_1 = 2^1 + 1 = 3$ となり

かつ $n=1$ のときも成り立つ

よって,

$$a_n = 2^n + 1$$

6. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

$$a_{n+1} - a_n = 3^n \text{ より}$$

$\{a_{n+1} - a_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから

$n \geq 2$ のとき $\leftarrow (2) \text{ (1) } (n+1) - n = 1$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 2 + \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} = \frac{4+3^n-3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(3^n + 1)$$

ここで、 $n=1$ とすると、 $a_1 = \frac{1}{2}(3^1 + 1) = 2$ となり

これは $n=1$ のときも成り立つ $\leftarrow (2) \text{ (1) } (n+1) - n = 1$

よって

$$a_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$$

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

与式より

$$a_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}(a_n - 6)$$

数列 $\{a_n - 6\}$ は初項 $a_1 - 6 = 1 - 6 = -5$,

公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$a_n - 6 = -5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_n = -5 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 6$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3}a + 4 \\ \frac{2}{3}a = 4 \\ a = 6 \end{cases}$$

7. 次のように、奇数の列を 1 個, 2 個, 3 個, ... の群に分ける。

$$1 \mid 3, 5 \mid 7, 9, 11 \mid 13, 15, 17, 19 \mid \dots$$

(1) 第 n 群の最初の数を求めよ。

$n \geq 2$ のとき、 $n-1$ 群までに含まれる項の数は

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)n$$

よって、第 n 群の最初の項は初めから数えて

$$N = \frac{1}{2}(n-1)n + 1 = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2) \text{ 番め である。}$$

よって、第 n 群の最初の数は $2N - 1$ より

$$2 \times \frac{1}{2}(n^2 - n + 2) - 1 = n^2 - n + 1 \quad \textcircled{1}$$

(2) 第 n 群に含まれる数の和を求めよ。

第 n 群に含まれる数の和は

初項 $n^2 - n + 1$, 公差 2 の等差数列の、第 n 項

までの和に等しいから

$$\frac{n}{2} \{2(n^2 - n + 1) + (n-1) \cdot 2\} =$$

$$= n(n^2 - n + 1 + (n-1))$$

$$= n \cdot n^2$$

$$= n^3 \quad \textcircled{2}$$

(3) 125 は第何群の何番目か。

125 が第 n 群に含まれるとすると

$$n^2 - n + 1 \leq 125 < (n+1)^2 - (n+1) + 1$$

$$n^2 - n + 1 \leq 125 < n^2 + n + 1$$

$$n(n-1) \leq 124 < n(n+1) \quad \textcircled{3}$$

$$10 \cdot 11 = 110, 11 \cdot 12 = 132 \text{ より}$$

③ をみるに自然数 n は $n = 11$

$n = 11$ のとき

$$n^2 - n + 1 = 11^2 - 11 + 1 = 111$$

よって、125 が第 11 群の m 番目とすると

$$111 + (m-1) \cdot 2 = 125 \quad \therefore 2(m-1) = 14$$

$$m = 8$$

よって、125 は

第 11 群の 8 番目

⑥

8. n を自然数とする。数学的帰納法によって、次の不等式を証明せよ。

$$3^n \geq 1 + 2n \quad \textcircled{1}$$

(1) $n=1$ のとき

$$(左辺) = 3^1 = 3, (右辺) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

となり、 $n=1$ のとき ① が成り立つ

(2) $n=k$ のとき、① が成り立つと仮定すると

$$3^k \geq 1 + 2k$$

($n=k+1$ のときを考察)

$$3^{k+1} - \{1 + 2(k+1)\}$$

$$= 3 \cdot 3^k - (2k+3)$$

$$> 3(1+2k) - (2k+3)$$

$$= 4k > 0$$

$$\therefore 3^{k+1} \geq 1 + 2(k+1)$$

となり、 $n=k+1$ のときも ① が成り立つ

(1), (2) より 数学的帰納法により

すべての自然数 n に $3^n \geq 1 + 2n$ が成り立つ。⑩

$$a_{n+1} = a_n + 3^n \quad \text{両辺を } 3^{n+1} \text{ で割る}$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^{n+1}} + \frac{3^n}{3^{n+1}}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$$

$$b_n = \frac{a_n}{3^n} \text{ とおくと } b_1 = \frac{a_1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}$$

したがって、 b_n の漸化式は

$$C = \frac{1}{3}C + \frac{1}{3} \quad \therefore C = \frac{1}{2}$$

$$\therefore b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}$$

$$\therefore C = \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}$$

$$b_{n+1} - C = \frac{1}{3}(b_n - C)$$

$$\therefore b_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(b_n - \frac{1}{2})$$

$$(C=\frac{1}{2} \text{ とおくと})$$

$$b_n - \frac{1}{2} = (b_1 - \frac{1}{2}) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

両辺を 3^n で割る

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2}$$