第３回定期考査（数列）Ｈ２０．９．２７　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

１．1 から 100 までの整数について，４で割ると余りが 1 となる数の総和を求めよ。

２．次の数列の一般項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 4}$, $\dfrac{1}{4\cdot 7}$, $\dfrac{1}{7\cdot 10}$, $\dfrac{1}{10\cdot 13}$, ……

(2) 1 , $1+2$, $1+2+2^2$, $1+2+2^2+2^3$, ……

(3) 4 , 12 , 26 , 46 , 72 , 104 , ……

(4) $1\cdot 1$, $3\cdot 3$, $5\cdot 3^2$, $7\cdot 3^3$, $9\cdot 3^4$, ……

3．数列$\{a_n\}$：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{6}$，$\frac{3}{6}$，$\frac{4}{6}$，$\frac{5}{6}$，…… について

(1) $\frac{2}{22}$ は第何項か求めよ。

(2) この数列の第３００項を求めよ。

4．数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_n=2a_n-n$ のとき

(1) この数列の初項 a_1 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(3) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

5．n が２以上の自然数のとき，不等式 $3^n>n^2$ を数学的帰納法を用いて証明せよ。

第3回定期考査（数列）H20．9．27　　　　(　　)組(　　)番　名前(こたえ)

1．1から100までの整数について，4で割ると余りが1となる数の総和を求めよ。

$1, 5, 9, 13, \cdots$

よって 初項1，公差4の等差数列 より

一般項 $1+4(n-1) = 4n-3$

末項は $4n-3 \leqq 100$

$\therefore\ n \leqq \dfrac{103}{4} = 25.\cdots$

より 第25項で，その数は $4\cdot 25 - 3 = 97$

ゆえに 総和 S は

$$S = \frac{1}{2}\cdot 25(1+97)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 25\cdot 98 = 1225$$

10

2．次の数列の一般項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 4}$, $\dfrac{1}{4\cdot 7}$, $\dfrac{1}{7\cdot 10}$, $\dfrac{1}{10\cdot 13}$, ……

$1, 4, 7, 10, \cdots\cdots, 1+3(n-1) = 3n-2$

$4, 7, 10, 13, \cdots, 4+3(n-1) = 3n+1$

よって一般項は $\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$　2

また．

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

より

和 $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \cdots + \frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{3n-2}} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3n+1-1}{3n+1} = \frac{n}{3n+1}$$

12

(2) 1, $1+2$, $1+2+2^2$, $1+2+2^2+2^3$, ……

一般項 $\underbrace{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}$ $= \dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}$

初項1，公比2
項数 n

$= 2^n - 1$

2

また 和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2^k - 1)$

$$= \frac{2(2^n-1)}{2-1} - n$$

$$= 2^{n+1} - 2 - n$$

12

(3) 4，12，26，46，72，104，……

階差数列 $\{b_n\}$：$8, 14, 20, 26, 32, \cdots$

よって 数列 $\{b_n\}$ は，初項8，公差6の等差数列

$\therefore\ b_n = 8 + 6(n-1) = 6n+2$

よって $n \geqq 2$ の時

$$a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1}(6k+2)$$

$$= 4 + 6\cdot\frac{1}{2}(n-1)\cdot n + 2(n-1)$$

$$= 3n^2 - n + 2 \quad \cdots(*)$$

$(*)$ に $n=1$ を代入すると $3-1+2=4$ で a_1 に一致する。

$\therefore\ a_n = 3n^2 - n + 2$　6

また．

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 - k + 2)$$

$$= 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) + 2n$$

$$= \frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1) - (n+1) + 4\}$$

$$= \frac{1}{2}n(2n^2+2n+4)$$

$$= n(n^2+n+2)$$

12

(4) $1\cdot 1$, $3\cdot 3$, $5\cdot 3^2$, $7\cdot 3^3$, $9\cdot 3^4$, ……

一般項 $(2n-1)\cdot 3^{n-1}$　2

また

$S = 1\cdot 1 + 3\cdot 3 + 5\cdot 3^2 + \cdots + (2n-1)\cdot 3^{n-1}$ とおくとき

$$\begin{array}{rl} S = & 1\cdot 1 + 3\cdot 3 + 5\cdot 3^2 + \cdots + (2n-1)\cdot 3^{n-1} \\ -)\ 3S = & \qquad 1\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \cdots + (2n-3)\cdot 3^{n-1} + (2n-1)\cdot 3^n \\ \hline -2S = & 1\cdot 1 + \underbrace{2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + \cdots + 2\cdot 3^{n-1}} - (2n-1)\cdot 3^n \end{array}$$

初項 $2\cdot 3$，公比 3
項数 $n-1$

$$= 1 + \frac{2\cdot 3(3^{n-1}-1)}{3-1} - (2n-1)\cdot 3^n$$

$$= 1 + 3(3^{n-1}-1) - (2n-1)\cdot 3^n$$

$$= 1 + 3^n - 3 - (2n-1)\cdot 3^n$$

$$= -(2n-2)\cdot 3^n - 2$$

よって

$$-2S = -(2n-2)\cdot 3^n - 2$$

が成り立つので

$$S = (n-1)\cdot 3^n + 1$$

12

/58

1群 2群 3群 4群 5群

3. 数列$\{a_n\}$：$\frac{1}{2}\,\Big|\,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\,\Big|\,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4}\,\Big|\,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}\,\Big|\,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6}\,\Big|$ …… について

(1) $\frac{2}{22}$ は第何項か求めよ。

分母が $N+1$ である項の集まりを N群とする。

N群は N 個の項より構成される。

$\frac{2}{22}$ は 21群の2番目

よって

$$\underbrace{1+2+\cdots+20}_{20群まで}+2=\frac{1}{2}\cdot20\cdot21+2$$
$$=212$$

よって 第212項 (5)

(2) この数列の第３００項を求めよ。

第300項が N群に属するとする。

すると

$$1+2+\cdots+(N-1)+1\leqq300<1+2+\cdots+N+1$$

つまり

$$\frac{1}{2}(N-1)N+1\leqq300<\frac{1}{2}N(N+1)+1$$

が成り立つ。すると

$$\frac{1}{2}(N-1)N\leqq299<\frac{1}{2}N(N+1)$$

$$\therefore\ (N-1)N\leqq598<N(N+1)\ \cdots(*)$$

ここで

$$23\times24=552,\quad 24\times25=600$$

より、不等式(*)を満たす N は $N=24$

そして、第23群までには

$$1+2+\cdots+23=\frac{1}{2}\cdot23\cdot24=276\ 項$$

あるので、$300-276=24$

ゆえに第300項は第24群の24番目

よって $\frac{24}{25}$ (15)

4. 数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_n=2a_n-n$ のとき

(1) この数列の初項 a_1 を求めよ。

$n=1$を漸化式に代入して

$$S_1=2a_1-1$$

ここで $S_1=a_1$ より

$$a_1=2a_1-1$$

解いて $a_1=1$ (2)

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

漸化式のnに$n+1$を代入して

$$S_{n+1}=2a_{n+1}-(n+1)\ \cdots(i)$$
$$S_n=2a_n-n\ \cdots\cdots(ii)$$

(i)−(ii) より

$$S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}-2a_n-1\ \cdots(*)$$

そして $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ より(*)式は

$$a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n-1$$

$$\therefore\ a_{n+1}=2a_n+1$$ (5)

(3) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(1)(2)より

$$\begin{cases}a_1=1\\ a_{n+1}=2a_n+1\end{cases}$$

を解く。特性方程式より

$$c=2c+1$$
$$\therefore\ c=-1$$

よって漸化式は

$$a_{n+1}-c=2(a_n-c)$$

つまり

$$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$$

と変形できる。

ゆえに数列$\{a_n+1\}$は初項 $a_1+1=1+1=2$ 公比2の等比数列

$$\therefore\ a_n+1=2\cdot2^{n-1}$$
$$a_n+1=2^n$$
$$\therefore\ a_n=2^n-1$$ (5)

5. nが２以上の自然数のとき，不等式 $3^n>n^2$ を数学的帰納法を用いて証明せよ。

$3^n>n^2$ …… (A) とおく。

(i) $n=2$の時

(左辺)$=3^2=9$, (右辺)$=2^2=4$

よって (左辺)>(右辺) となるので

$n=2$の時(A)は成り立つ。

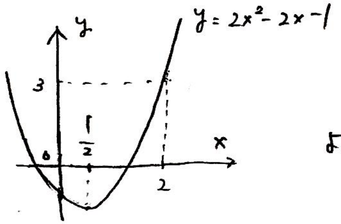
(ii) $n=k$ ($k\geqq2$)の時、(A)が成り立つと仮定する。すると

$$3^k>k^2\ \cdots(*)$$

が成り立つ。ここで

$$3^{k+1}-(k+1)^2=3\cdot3^k-(k+1)^2$$
$$>3\cdot k^2-(k+1)^2\quad(\because(*)より)$$
$$=3k^2-(k^2+2k+1)$$
$$=2k^2-2k-1$$

この時 $y=2x^2-2x-1$ のグラフより



$x\geqq2$において常に $y>0$ である。

よって $k\geqq2$において

$$2k^2-2k-1>0$$

が成り立つので

$3^{k+1}>(k+1)^2$ が成り立つ。

つまり、$n=k+1$の時も(A)が成り立つ。

(i)(ii)より

2以上のすべての自然数nに対して

$3^n>n^2$ が成り立つ。// (10)