数学演習（数学的帰納法）R１．１１．２８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ n が自然数のとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ。

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1 \quad \cdots\cdots ①$$

$\boxed{2}$ すべての自然数 n について，$4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数であることを証明せよ。

$\boxed{3}$ 3 以上のすべての自然数 n について，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$3^{n-1}>n^2-n+2 \quad \cdots\cdots ①$$

$\boxed{4}$ $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+(2n+1)a_n}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2) a_n を n で表す式を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ。

$\boxed{5}$ p は素数とする。このとき，自然数 n について，n^p-n が p の倍数であることを数学的帰納法によって証明せよ。

$\boxed{6}$ n は自然数とする。2 数 x，y の和と積が整数ならば，x^n+y^n は整数であることを証明せよ。

$\boxed{7}$ 数列 $\{a_n\}$（ただし $a_n>0$）について，関係式

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2=a_1{}^3+a_2{}^3+\cdots\cdots+a_n{}^3$$

が成り立つとき，$a_n=n$ であることを証明せよ。

1 n が自然数のとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ。

$$1\cdot1!+2\cdot2!+\cdots\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1 \quad \cdots\cdots ①$$

解答　略

解説

[1]　$n=1$ のとき

$(左辺)=1\cdot1!=1$，　$(右辺)=(1+1)!-1=1$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$$1\cdot1!+2\cdot2!+\cdots\cdots+k\cdot k!=(k+1)!-1 \quad \cdots\cdots ②$$

$n=k+1$ のときを考えると，② から

$$1\cdot1!+2\cdot2!+\cdots\cdots+k\cdot k!+(k+1)\cdot(k+1)!$$
$$=(k+1)!-1+(k+1)\cdot(k+1)!=\{1+(k+1)\}\cdot(k+1)!-1$$
$$=(k+2)\cdot(k+1)!-1=(k+2)!-1=\{(k+1)+1\}!-1$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

2 すべての自然数 n について，$4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数であることを証明せよ。

解答　略

解説

「$4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数である」を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　$4^{2\cdot1+1}+3^{1+2}=64+27=91=13\cdot7$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$$4^{2k+1}+3^{k+2}=13m \ (m \text{ は整数}) \cdots\cdots ② \quad \text{とおける。}$$

$n=k+1$ のときを考えると，② から

$$4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}=4^2\cdot4^{2k+1}+3^{k+3}=16(13m-3^{k+2})+3^{k+3}$$
$$=13\cdot16m-(16-3)\cdot3^{k+2}=13(16m-3^{k+2})$$

$16m-3^{k+2}$ は整数であるから，$4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}$ は 13 の倍数である。

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

別解 1.　二項定理を利用

$$4^{2n+1}+3^{n+2}=4\cdot4^{2n}+3^2\cdot3^n=4\cdot16^n+9\cdot3^n=4(13+3)^n+9\cdot3^n$$
$$=4(13^n+{}_n\mathrm{C}_1 13^{n-1}\cdot3+{}_n\mathrm{C}_2 13^{n-2}\cdot3^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}13\cdot3^{n-1}+3^n)+9\cdot3^n$$
$$=4\cdot13(13^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_1 13^{n-2}\cdot3+{}_n\mathrm{C}_2 13^{n-3}\cdot3^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}3^{n-1})+4\cdot3^n+9\cdot3^n$$

よって，$4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数である。

別解 2.　合同式を利用

$16\equiv3 \pmod{13}$ であるから　$4^{2n}\equiv3^n \pmod{13}$　　よって　$4^{2n+1}\equiv4\cdot3^n \pmod{13}$

この両辺に $3^{n+2}=9\cdot3^n$ を加えると

$4^{2n+1}+3^{n+2}\equiv4\cdot3^n+9\cdot3^n\equiv13\cdot3^n\equiv0 \pmod{13}$

ゆえに，$4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数である。

3 3 以上のすべての自然数 n について，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$3^{n-1}>n^2-n+2 \quad \cdots\cdots ①$$

解答　略

解説

[1]　$n=3$ のとき　　$(左辺)=3^2=9$，$(右辺)=3^2-3+2=8$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k\,(k\geqq3)$ のとき，① が成り立つと仮定すると　　$3^{k-1}>k^2-k+2 \quad \cdots\cdots ②$

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$3^k-\{(k+1)^2-(k+1)+2\}=3\cdot3^{k-1}-(k^2+k+2)$$
$$>3(k^2-k+2)-(k^2+k+2)$$
$$=2k^2-4k+4=2(k-1)^2+2>0$$

ゆえに　　$3^k>(k+1)^2-(k+1)+2$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，$n\geqq3$ であるすべての自然数 n について ① は成り立つ。

4 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+(2n+1)a_n}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　a_n を n で表す式を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ。

解答　(1)　$a_2=\dfrac{1}{4}$，$a_3=\dfrac{1}{9}$，$a_4=\dfrac{1}{16}$　　(2)　$a_n=\dfrac{1}{n^2}$，証明略

解説

(1)　$a_2=\dfrac{a_1}{1+3a_1}=\dfrac{1}{1+3\cdot1}=\dfrac{1}{4}$，

$$a_3=\frac{a_2}{1+5a_2}=\frac{\frac{1}{4}}{1+5\cdot\frac{1}{4}}=\frac{1}{4+5}=\frac{1}{9},$$

$$a_4=\frac{a_3}{1+7a_3}=\frac{\frac{1}{9}}{1+7\cdot\frac{1}{9}}=\frac{1}{9+7}=\frac{1}{16}$$

(2)　(1) から，$a_n=\dfrac{1}{n^2}$ ……① と推測される。

[1]　$n=1$ のとき　　$a_1=\dfrac{1}{1^2}=1$ から，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$$a_k=\frac{1}{k^2} \quad \cdots\cdots ②$$

$n=k+1$ のときを考えると，② から

$$a_{k+1}=\frac{a_k}{1+(2k+1)a_k}=\frac{\frac{1}{k^2}}{1+(2k+1)\cdot\frac{1}{k^2}}=\frac{1}{k^2+(2k+1)}=\frac{1}{(k+1)^2}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

5 p は素数とする。このとき，自然数 n について，n^p-n が p の倍数であることを数学的帰納法によって証明せよ。

解答　略

解説

「n^p-n は p の倍数である」を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　$1^p-1=0$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると，$k^p-k=pm$（m は整数）　……② とおける。

$n=k+1$ のときを考えると，② から

$$(k+1)^p-(k+1)=k^p+{}_p\mathrm{C}_1k^{p-1}+{}_p\mathrm{C}_2k^{p-2}+\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}k^2+{}_p\mathrm{C}_{p-1}k+1-(k+1)$$
$$={}_p\mathrm{C}_1k^{p-1}+{}_p\mathrm{C}_2k^{p-2}+\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}k^2+{}_p\mathrm{C}_{p-1}k+pm \quad \cdots\cdots ③$$

$1\leqq r\leqq p-1$ のとき　　${}_p\mathrm{C}_r=\dfrac{p!}{r!(p-r)!}=\dfrac{p}{r}\cdot\dfrac{(p-1)!}{(r-1)!(p-r)!}=\dfrac{p}{r}\cdot{}_{p-1}\mathrm{C}_{r-1}$

よって　　$r\cdot{}_p\mathrm{C}_r=p\cdot{}_{p-1}\mathrm{C}_{r-1}$

p は素数であるから，r と p は互いに素であり，${}_p\mathrm{C}_r$ は p で割り切れる。

ゆえに，③ から，$(k+1)^p-(k+1)$ は p の倍数である。

したがって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について，n^p-n は p の倍数である。

6 n は自然数とする。2 数 x，y の和と積が整数ならば，x^n+y^n は整数であることを証明せよ。

解答　略

解説

[1]　$n=1$ のとき，$x^1+y^1=x+y$ で整数である。

$n=2$ のとき，$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ で整数である。

[2]　$n=k$，$k+1$ のとき，x^n+y^n が整数である，すなわち，x^k+y^k，$x^{k+1}+y^{k+1}$ はともに整数であると仮定する。

$n=k+2$ のときを考えると

$$x^{k+2}+y^{k+2}=(x^{k+1}+y^{k+1})(x+y)-xy(x^k+y^k)$$

$x+y$，xy は整数であるから，仮定により，$x^{k+2}+y^{k+2}$ も整数である。

よって，$n=k+2$ のときにも x^n+y^n は整数である。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について，x^n+y^n は整数である。

7 数列 $\{a_n\}$（ただし $a_n>0$）について，関係式

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2=a_1{}^3+a_2{}^3+\cdots\cdots+a_n{}^3$$

が成り立つとき，$a_n=n$ であることを証明せよ。

解答　略

解説

[1]　$n=1$ のとき，$a_1{}^2=a_1{}^3$，$a_1>0$ から　　$a_1=1$

ゆえに，$n=1$ のとき $a_n=n$ は成り立つ。

[2]　$n\leqq k$ のとき，$a_n=n$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のときを考えると

$$\{(1+2+\cdots\cdots+k)+a_{k+1}\}^2=1^3+2^3+\cdots\cdots+k^3+a_{k+1}{}^3 \quad \cdots\cdots ①$$

$$(\text{① の左辺})=(1+2+\cdots\cdots+k)^2+2(1+2+\cdots\cdots+k)a_{k+1}+a_{k+1}{}^2$$
$$=\left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2+2\cdot\frac{1}{2}k(k+1)a_{k+1}+a_{k+1}{}^2$$
$$=1^3+2^3+\cdots\cdots+k^3+k(k+1)a_{k+1}+a_{k+1}{}^2$$

① の右辺と比較して　　$k(k+1)a_{k+1}+a_{k+1}{}^2=a_{k+1}{}^3$

ゆえに　　$a_{k+1}(a_{k+1}+k)\{a_{k+1}-(k+1)\}=0$

$a_{k+1}>0$ であるから　　$a_{k+1}=k+1$

よって，$n=k+1$ のときにも $a_n=n$ は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n に対して $a_n=n$ は成り立つ。