数学演習（いろいろな漸化式）R１．１１．２７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=0$, $a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$

(2) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}+4a_{n+1}-5a_n=0$

$\boxed{2}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=0$, $a_2=2$, $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $a_1=b_1=1$, $a_{n+1}=a_n+4b_n$, $b_{n+1}=a_n+b_n$ で定めるとき

(1) $a_{n+1}+xb_{n+1}=y(a_n+xb_n)$ を満たす x, y の組を 2 組求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $a_1=1$，$b_1=-1$，$a_{n+1}=5a_n-4b_n$，$b_{n+1}=a_n+b_n$ で定めるとき

(1) $a_{n+1}+xb_{n+1}=y(a_n+xb_n)$ を満たす x，y の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{5}$ $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-9}{a_n-5}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) すべての自然数 n に対して $a_n \neq 3$ であることを示せ。

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n で表せ。また，一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{6}$ 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=4$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$ で定められている。

(1) $b_n=\dfrac{a_n+4}{a_n-2}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n で表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{7}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が，一般項 a_n を用いて $S_n=-2a_n-2n+5$ と表されるとき，一般項 a_n を n で表せ。

$\boxed{8}$ 硬貨を投げて数直線上を原点から正の向きに進む。表が出れば 1 進み，裏が出れば 2 進むものとする。このとき，ちょうど点 n に到達する確率を p_n で表す。ただし，n は自然数とする。

(1) 2 以上の n について，p_{n+1} と p_n，p_{n-1} との関係式を求めよ。

(2) p_n を求めよ。

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$

(2)　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}+4a_{n+1}-5a_n=0$

解答　(1)　$a_n=\frac{1}{5}\{3^{n-1}-(-2)^{n-1}\}$　　(2)　$a_n=\frac{1}{6}\{7-(-5)^{n-1}\}$

解説

(1)　漸化式を変形すると

$$a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n) \quad \cdots\cdots ①,$$
$$a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n) \quad \cdots\cdots ②$$

① より，数列 $\{a_{n+1}+2a_n\}$ は初項 $a_2+2a_1=1$，公比 3 の等比数列であるから

$$a_{n+1}+2a_n=3^{n-1} \quad \cdots\cdots ③$$

② より，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 $a_2-3a_1=1$，公比 -2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-3a_n=(-2)^{n-1} \quad \cdots\cdots ④$$

③－④ から　　$5a_n=3^{n-1}-(-2)^{n-1}$

したがって　　$a_n=\frac{1}{5}\{3^{n-1}-(-2)^{n-1}\}$

(2)　漸化式を変形すると　　$a_{n+2}-a_{n+1}=-5(a_{n+1}-a_n)$

ゆえに，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=2-1=1$，公比 -5 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-a_n=(-5)^{n-1}$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-5)^{k-1}=1+\frac{1\cdot\{1-(-5)^{n-1}\}}{1-(-5)}=\frac{1}{6}\{7-(-5)^{n-1}\}$$

$n=1$ を代入すると，$\frac{1}{6}\{7-(-5)^0\}=1$ であるから，上の式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　　$a_n=\frac{1}{6}\{7-(-5)^{n-1}\}$

別解　漸化式を変形して　　$a_{n+2}+5a_{n+1}=a_{n+1}+5a_n$

よって　　$a_{n+1}+5a_n=a_n+5a_{n-1}=\cdots\cdots=a_2+5a_1=7$

$a_{n+1}+5a_n=7$ を変形して

$$a_{n+1}-\frac{7}{6}=-5\left(a_n-\frac{7}{6}\right) \qquad よって \qquad a_n=\frac{1}{6}\{7-(-5)^{n-1}\}$$

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=0,\ a_2=2,\ a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$$

解答　$a_n=(n-1)\cdot 2^{n-1}$

解説

漸化式を変形して

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$$

ゆえに，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は，初項 $a_2-2a_1=2-0=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-2a_n=2\cdot 2^{n-1} \qquad すなわち \qquad a_{n+1}-2a_n=2^n$$

両辺を 2^{n+1} で割ると　　$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}$

$\frac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1=\frac{a_1}{2}=0$，公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$b_n=0+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(n-1)$$

$a_n=2^nb_n$ であるから　　$a_n=2^n\cdot\frac{1}{2}(n-1)=(n-1)\cdot 2^{n-1}$

3 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $a_1=b_1=1$，$a_{n+1}=a_n+4b_n$，$b_{n+1}=a_n+b_n$ で定めるとき

(1)　$a_{n+1}+xb_{n+1}=y(a_n+xb_n)$ を満たす x，y の組を 2 組求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1)　$(x,\ y)=(2,\ 3)$，$(-2,\ -1)$　　(2)　$a_n=\frac{3^n+(-1)^n}{2}$，$b_n=\frac{3^n-(-1)^n}{4}$

解説

(1)　$a_{n+1}+xb_{n+1}=a_n+4b_n+x(a_n+b_n)$

$$=(1+x)a_n+(4+x)b_n$$

よって，$a_{n+1}+xb_{n+1}=y(a_n+xb_n)$ とすると

$$(1+x)a_n+(4+x)b_n=ya_n+xyb_n$$

これがすべての n について成り立つための条件は　　$1+x=y$，　$4+x=xy$

ゆえに　$x^2=4$　　よって　$x=\pm 2$

ゆえに　$(x,\ y)=(2,\ 3)$，$(-2,\ -1)$

(2)　(1) から　　$a_{n+1}+2b_{n+1}=3(a_n+2b_n)$，$a_1+2b_1=3$；

$a_{n+1}-2b_{n+1}=-(a_n-2b_n)$，$a_1-2b_1=-1$

よって，数列 $\{a_n+2b_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列；

数列 $\{a_n-2b_n\}$ は初項 -1，公比 -1 の等比数列。

ゆえに　　$a_n+2b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$ ……①，　$a_n-2b_n=-(-1)^{n-1}=(-1)^n$ ……②

(①＋②)÷2 から　　$a_n=\frac{3^n+(-1)^n}{2}$　　　(①－②)÷4 から　　$b_n=\frac{3^n-(-1)^n}{4}$

4 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $a_1=1$，$b_1=-1$，$a_{n+1}=5a_n-4b_n$，$b_{n+1}=a_n+b_n$ で定めるとき

(1)　$a_{n+1}+xb_{n+1}=y(a_n+xb_n)$ を満たす x，y の値を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1)　$x=-2$，$y=3$　　(2)　$a_n=3^{n-1}(2n-1)$，$b_n=3^{n-1}(n-2)$

解説

(1)　$a_{n+1}+xb_{n+1}=5a_n-4b_n+x(a_n+b_n)$

$$=(5+x)a_n+(-4+x)b_n$$

よって，$a_{n+1}+xb_{n+1}=y(a_n+xb_n)$ とすると

$$(5+x)a_n+(-4+x)b_n=ya_n+xyb_n$$

これがすべての n について成り立つための条件は　　$5+x=y$，$-4+x=xy$

$5+x=y$ を $-4+x=xy$ に代入して整理すると

$$x^2+4x+4=0 \qquad ゆえに \qquad x=-2$$

したがって，求める x，y の値は　　$x=-2$，$y=3$

(2)　(1) から　　$a_{n+1}-2b_{n+1}=3(a_n-2b_n)$

よって，数列 $\{a_n-2b_n\}$ は，初項 $a_1-2b_1=3$，公比 3 の等比数列であるから

$$a_n-2b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n \qquad すなわち \qquad a_n=2b_n+3^n$$

これに $a_n=b_{n+1}-b_n$ を代入すると　　$b_{n+1}=3b_n+3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると　　$\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{b_n}{3^n}+\frac{1}{3}$

数列 $\left\{\frac{b_n}{3^n}\right\}$ は，初項 $\frac{b_1}{3^1}=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}$，公差 $\frac{1}{3}$ の等差数列であるから

$$\frac{b_n}{3^n}=-\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{n-2}{3}$$

よって　　$a_n=3^{n-1}(2n-1)$，$b_n=3^{n-1}(n-2)$

5 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n-9}{a_n-5}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　すべての自然数 n に対して $a_n\neq 3$ であることを示せ。

(2)　$b_n=\frac{1}{a_n-3}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n で表せ。また，一般項 a_n を求めよ。

解答　(1)　略　　(2)　$b_{n+1}=b_n-\frac{1}{2}$，$a_n=3-\frac{2}{n}$

解説

(1)　ある自然数 n について $a_{n+1}=3$ とすると，条件式から

$$a_n-9=3(a_n-5) \qquad ゆえに \qquad a_n=3$$

よって　　$a_{n+1}=a_n=a_{n-1}=\cdots\cdots=a_1=3$　　　これは条件 $a_1=1$ に反する。

ゆえに，$a_{n+1}=3$ を満たす自然数 n はない。

また　　$a_1\neq 3$

したがって，すべての自然数 n に対して $a_n\neq 3$ である。

(2)　$a_{n+1}-3=\frac{a_n-9}{a_n-5}-3$ から　　$a_{n+1}-3=-\frac{2(a_n-3)}{a_n-5}$

(1) より $a_n\neq 3$ であるから，両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}-3}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-5}{a_n-3} \qquad よって \qquad \frac{1}{a_{n+1}-3}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{a_n-3}$$

ゆえに　　$b_{n+1}=b_n-\frac{1}{2}$　　　また　　$b_1=\frac{1}{a_1-3}=-\frac{1}{2}$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $-\frac{1}{2}$，公差 $-\frac{1}{2}$ の等差数列で

$$b_n=-\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{n}{2}$$

したがって　　$a_n=3+\frac{1}{b_n}=3-\frac{2}{n}$

6 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=4$，$a_{n+1}=\frac{4a_n+8}{a_n+6}$ で定められている。

(1)　$b_n=\frac{a_n+4}{a_n-2}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n で表せ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1)　$b_{n+1}=4b_n$　　(2)　$a_n=\frac{2(4^n+2)}{4^n-1}$

解説

(1)　$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}+4}{a_{n+1}-2}=\dfrac{\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}+4}{\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}-2}=\dfrac{4a_n+8+4(a_n+6)}{4a_n+8-2(a_n+6)}$

$=\dfrac{8a_n+32}{2a_n-4}=\dfrac{4(a_n+4)}{a_n-2}=4b_n$

したがって　　$b_{n+1}=4b_n$

(2)　$b_1=\dfrac{a_1+4}{a_1-2}=\dfrac{4+4}{4-2}=4$

ゆえに，(1) より，数列 $\{b_n\}$ は初項 4，公比 4 の等比数列であるから　$b_n=4\cdot 4^{n-1}=4^n$

よって　　$\dfrac{a_n+4}{a_n-2}=4^n$　　　ゆえに　　$a_n+4=4^n(a_n-2)$

したがって　　$a_n=\dfrac{2(4^n+2)}{4^n-1}$

7　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が，一般項 a_n を用いて $S_n=-2a_n-2n+5$ と表されるとき，一般項 a_n を n で表せ。

解答　$a_n=3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-2$

解説

$S_n=-2a_n-2n+5$ …… ① とする。

① に $n=1$ を代入すると　　$S_1=-2a_1-2+5$

$S_1=a_1$ であるから　　$a_1=-2a_1-2+5$　　　よって　　$a_1=1$

① から　　　$S_{n+1}=-2a_{n+1}-2(n+1)+5$ …… ②

②−① から　　$S_{n+1}-S_n=-2(a_{n+1}-a_n)-2$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ であるから　　$a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n)-2$

よって　　$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n-\dfrac{2}{3}$　　　ゆえに　　$a_{n+1}+2=\dfrac{2}{3}(a_n+2)$

ここで　　$a_1+2=1+2=3$

数列 $\{a_n+2\}$ は初項 3，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$a_n+2=3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　　　したがって　　$a_n=3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-2$

8　硬貨を投げて数直線上を原点から正の向きに進む。表が出れば 1 進み，裏が出れば 2 進むものとする。このとき，ちょうど点 n に到達する確率を p_n で表す。ただし，n は自然数とする。

(1)　2 以上の n について，p_{n+1} と p_n，p_{n-1} との関係式を求めよ。

(2)　p_n を求めよ。

解答　(1)　$p_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}p_{n-1}$　　(2)　$p_n=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

解説

(1)　点 $n+1$ に到達するには

[1]　点 n に到達した後，表が出る。　[2]　点 $n-1$ に到達した後，裏が出る。

の 2 通りの場合があり，[1]，[2] の事象は互いに排反である。

よって　　$p_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}p_{n-1}$　…… ①

(2)　① を変形すると　　$p_{n+1}-p_n=-\dfrac{1}{2}(p_n-p_{n-1})$

$p_1=\dfrac{1}{2}$，$p_2=\dfrac{1}{2}p_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$ であるから　　$p_2-p_1=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

よって　　$p_{n+1}-p_n=\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$p_n=p_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　　$p_n=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$