数学演習（漸化式）R１．１１．２６　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=-3,\ a_{n+1}=a_n+4$　　(2) $a_1=4,\ 2a_{n+1}+3a_n=0$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2^n-3n+1$

$\boxed{2}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=6,\ a_{n+1}=4a_n-3$

$\boxed{3}$ $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+4n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{4}$ $a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n+3^{n+1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{5}$ $a_1=\dfrac{1}{5},\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n-1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{6}$ $a_1=1,\ a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{7}$ $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}a_n+1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $\dfrac{a_n}{n(n+1)}=b_n$ とおくとき，b_{n+1} を b_n と n の式で表せ。

(2) a_n を n の式で表せ。

$\boxed{8}$ $a_1=\dfrac{1}{2}$，$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{9}$ 平面上に，どの 3 本の直線も 1 点を共有しない，n 本の直線がある。次の場合，平面が直線によって分けられる領域の個数を n で表せ。

(1) どの 2 本の直線も平行でないとき。

(2) n $(n \geqq 2)$ 本の直線の中に，2 本だけ平行なものがあるとき。

$\boxed{10}$ 直線上に異なる 2 点 A，B があり，点 P は A と B の 2 点を行ったり来たりする。1 個のさいころを投げて 1 の目が出たとき，P は他の点に移動し，1 以外の目が出たときはその場所にとどまる。初めに P は A にいるとして，さいころを n 回投げたとき，P が A にいる確率を p_n で表す。

(1) p_1 を求めよ。

(2) p_{n+1} を p_n で表せ。

(3) p_n を n で表せ。

数学演習（漸化式）R１．１１．２６

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　　　）

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=-3,\ a_{n+1}=a_n+4$　　(2)　$a_1=4,\ 2a_{n+1}+3a_n=0$

(3)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2^n-3n+1$

解答　(1)　$a_n=4n-7$　　(2)　$a_n=4\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$　　(3)　$a_n=2^n-\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-2$

解説

(1)　$a_{n+1}-a_n=4$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=-3$，公差 4 の等差数列であるから

$$a_n=-3+(n-1)\cdot 4=4n-7$$

(2)　$a_{n+1}=-\dfrac{3}{2}a_n$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=4$，公比 $-\dfrac{3}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n=4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

(3)　$a_{n+1}-a_n=2^n-3n+1$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は 2^n-3n+1 であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-3k+1)=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k-3\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}1$$

$$=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)$$

$$=2^n-\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-2 \quad \cdots\cdots ①$$

$n=1$ のとき　$2^1-\dfrac{3}{2}\cdot 1^2+\dfrac{5}{2}\cdot 1-2=1$

$a_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=2^n-\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-2$

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=6,\ a_{n+1}=4a_n-3$

解答　$a_n=5\cdot 4^{n-1}+1$

解説

$a_{n+1}=4a_n-3$ を変形すると　$a_{n+1}-1=4(a_n-1)$

$a_n-1=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=4b_n,\ b_1=a_1-1=6-1=5$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 5，公比 4 の等比数列であるから

$b_n=5\cdot 4^{n-1}$　ゆえに　$a_n=b_n+1=5\cdot 4^{n-1}+1$

別解　$a_{n+1}=4a_n-3$ …… ① で n の代わりに $n+1$ とおくと

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-3 \quad \cdots\cdots ②$$

②－① から　$a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$b_{n+1}=4b_n,\quad b_1=a_2-a_1=(4\cdot 6-3)-6=15$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 15，公比 4 の等比数列であるから　$b_n=15\cdot 4^{n-1}$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}15\cdot 4^{k-1}=6+\frac{15(4^{n-1}-1)}{4-1}=5\cdot 4^{n-1}+1 \quad \cdots\cdots ③$$

$n=1$ のとき　$5\cdot 4^0+1=6$

$a_1=6$ であるから，③ は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=5\cdot 4^{n-1}+1$

3 $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+4n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$

解説

$a_{n+1}=3a_n+4n$ …… ① とすると

$$a_{n+2}=3a_{n+1}+4(n+1) \quad \cdots\cdots ②$$

②－① から　$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+4$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n+4$

これを変形すると　$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$

また　$b_1+2=a_2-a_1+2=7-1+2=8$

よって，数列 $\{b_n+2\}$ は初項 8，公比 3 の等比数列で

$b_n+2=8\cdot 3^{n-1}$　すなわち　$b_n=8\cdot 3^{n-1}-2$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(8\cdot 3^{k-1}-2)=1+\frac{8(3^{n-1}-1)}{3-1}-2(n-1)$$

$$=4\cdot 3^{n-1}-2n-1 \quad \cdots\cdots ③$$

$n=1$ のとき　$4\cdot 3^0-2\cdot 1-1=1$

$a_1=1$ であるから，③ は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$

別解　$f(n)=\alpha n+\beta$ とおき，$a_{n+1}=3a_n+4n$ が，

$a_{n+1}-f(n+1)=3\{a_n-f(n)\}$ …… ① の形に変形できるように α，β の値を定める。

① から　$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=3\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$

ゆえに　$a_{n+1}=3a_n-2\alpha n+\alpha-2\beta$

これと $a_{n+1}=3a_n+4n$ の右辺の係数を比較して　$-2\alpha=4,\ \alpha-2\beta=0$

よって　$\alpha=-2,\ \beta=-1$　ゆえに　$f(n)=-2n-1$

① より，数列 $\{a_n-(-2n-1)\}$ は初項 $a_1+2+1=4$，公比 3 の等比数列であるから

$a_n-(-2n-1)=4\cdot 3^{n-1}$　したがって　$a_n=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$

4 $a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n+3^{n+1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=3^{n+1}-3\cdot 2^n$

解説

$a_{n+1}=2a_n+3^{n+1}$ の両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+1$

$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+1$

これを変形すると　$b_{n+1}-3=\dfrac{2}{3}(b_n-3)$

また　$b_1-3=\dfrac{a_1}{3}-3=\dfrac{3}{3}-3=-2$

よって，数列 $\{b_n-3\}$ は初項 -2，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列で

$b_n-3=-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　ゆえに　$\dfrac{a_n}{3^n}=3-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

したがって　$a_n=3^n\left\{3-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}=3^{n+1}-3\cdot 2^n$

5 $a_1=\dfrac{1}{5},\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n-1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=\dfrac{1}{3\cdot(-1)^{n-1}+2}$

解説

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n-1}$ …… ① とする。

① において，$a_{n+1}=0$ とすると $a_n=0$ であるから，$a_n=0$ となる n があると仮定すると　$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots\cdots=a_1=0$

ところが $a_1=\dfrac{1}{5}\ (\neq 0)$ であるから，これは矛盾。

よって，すべての自然数 n について $a_n\neq 0$ である。

① の両辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=4-\dfrac{1}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=4-b_n$　これを変形すると　$b_{n+1}-2=-(b_n-2)$

また　$b_1-2=\dfrac{1}{a_1}-2=5-2=3$

ゆえに，数列 $\{b_n-2\}$ は初項 3，公比 -1 の等比数列で

$b_n-2=3\cdot(-1)^{n-1}$　すなわち　$b_n=3\cdot(-1)^{n-1}+2$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{3\cdot(-1)^{n-1}+2}$

6 $a_1=1,\ a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=2^{2-2^{2-n}}$

解説

$a_1=1>0$ で，$a_{n+1}=2\sqrt{a_n}\ (>0)$ であるから，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ である。

よって，$a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$ の両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2\sqrt{a_n}$$

ゆえに　$\log_2 a_{n+1}=1+\dfrac{1}{2}\log_2 a_n$

$\log_2 a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=1+\dfrac{1}{2}b_n$

これを変形して　$b_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(b_n-2)$

ここで　$b_1-2=\log_2 1-2=-2$

よって，数列 $\{b_n-2\}$ は初項 -2，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列で

$$b_n-2=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad \text{すなわち}\quad b_n=2-2^{2-n}$$

したがって，$\log_2 a_n=2-2^{2-n}$ から　$a_n=2^{2-2^{2-n}}$

$\boxed{7}$ $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}a_n+1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $\dfrac{a_n}{n(n+1)}=b_n$ とおくとき，b_{n+1} を b_n と n の式で表せ。

(2) a_n を n の式で表せ。

解答　(1) $b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$　(2) $a_n=\dfrac{n(3n+1)}{2}$

解説

(1) $a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}a_n+1$ の両辺を $(n+1)(n+2)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$\dfrac{a_n}{n(n+1)}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

(2) (1) から　$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$

$b_{n+1}-b_n=c_n$ とおくと　$c_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$

また，$b_1=\dfrac{a_1}{1\cdot 2}=1$ であり，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

$n=1$ のとき　$\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=1$

$b_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

よって　$a_n=n(n+1)b_n=n(n+1)\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n(3n+1)}{2}$

$\boxed{8}$ $a_1=\dfrac{1}{2}$，$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$

解説

［解答 1］ 漸化式を変形して　$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$ $(n\geqq 2)$

ゆえに　$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}a_{n-2}$ $(n\geqq 3)$

これを繰り返して　$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}a_1$

よって　$a_n=\dfrac{2\cdot 1}{(n+1)n}\cdot\dfrac{1}{2}$　すなわち　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$　……①

$n=1$ のとき　$\dfrac{1}{1\cdot(1+1)}=\dfrac{1}{2}$

$a_1=\dfrac{1}{2}$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

［解答 2］ 漸化式の両辺に n を掛けると　$(n+1)na_n=n(n-1)a_{n-1}$ $(n\geqq 2)$

よって　$(n+1)na_n=n(n-1)a_{n-1}=\cdots\cdots=2\cdot 1\cdot a_1=1$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$　……①

$n=1$ のとき　$\dfrac{1}{1\cdot(1+1)}=\dfrac{1}{2}$

$a_1=\dfrac{1}{2}$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

$\boxed{9}$ 平面上に，どの 3 本の直線も 1 点を共有しない，n 本の直線がある。次の場合，平面が直線によって分けられる領域の個数を n で表せ。

(1) どの 2 本の直線も平行でないとき。

(2) n $(n\geqq 2)$ 本の直線の中に，2 本だけ平行なものがあるとき。

解答　(1) $\dfrac{n^2+n+2}{2}$　(2) $\dfrac{n^2+n}{2}$

解説

(1) n 本の直線で平面が a_n 個の領域に分けられているとする。

$(n+1)$ 本目の直線を引くと，その直線は他の n 本の直線で $(n+1)$ 個の線分または半直線に分けられ，領域は $(n+1)$ 個だけ増加する。

ゆえに　$a_{n+1}=a_n+n+1$

よって　$a_{n+1}-a_n=n+1$　また　$a_1=2$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $n+1$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=\frac{n^2+n+2}{2}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに，求める領域の個数は　$\dfrac{n^2+n+2}{2}$

(2) 平行な 2 直線のうちの 1 本を ℓ とすると，ℓ を除く $(n-1)$ 本は (1) の条件を満たすから，この $(n-1)$ 本の直線で分けられる領域の個数は (1) から　a_{n-1}

更に，直線 ℓ を引くと，ℓ はこれと平行な 1 本の直線以外の直線と $(n-2)$ 個の点で交わり，$(n-1)$ 個の領域が増える。

よって，求める領域の個数は

$$a_{n-1}+(n-1)=\frac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2}+(n-1)=\frac{n^2+n}{2}$$

$\boxed{10}$ 直線上に異なる 2 点 A，B があり，点 P は A と B の 2 点を行ったり来たりする。1 個のさいころを投げて 1 の目が出たとき，P は他の点に移動し，1 以外の目が出たときはその場所にとどまる。初めに P は A にいるとして，さいころを n 回投げたとき，P が A にいる確率を p_n で表す。

(1) p_1 を求めよ。　(2) p_{n+1} を p_n で表せ。　(3) p_n を n で表せ。

解答　(1) $p_1=\dfrac{5}{6}$　(2) $p_{n+1}=\dfrac{2}{3}p_n+\dfrac{1}{6}$　(3) $p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

解説

(1) さいころを 1 回投げたとき，P が A にいる確率が p_1 であるから，出た目は 1 以外の目である。

よって　$p_1=\dfrac{5}{6}$

(2) さいころを $(n+1)$ 回投げたとき，P が A にいる場合は

［1］ n 回目に P が A にいて，$(n+1)$ 回目に 1 以外の目が出る

［2］ n 回目に P が B にいて，$(n+1)$ 回目に 1 の目が出る

のいずれかであり，［1］，［2］ は互いに排反であるから

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{5}{6}+(1-p_n)\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{6}\quad\cdots\cdots①$$

(3) ① から　$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$　また　$p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$

数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\qquad\text{ゆえに}\qquad p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$