数学演習（漸化式）Ｈ２３．１２．１２　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．次の条件によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=4^n$　　　(2)　$a_1=-8$，$a_{n+1}-a_n=2n-1$

２．次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=3^{n-1}$　　　(2)　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$

３．数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+3}$ により定められる。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

４．数列 $\{a_n\}$ が，次の条件によって定義されているとき，一般項 a_n を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$　　　(2)　$a_1=-30$，$9a_{n+1}=a_n+\dfrac{4}{3^n}$

５．数列 $\{a_n\}$ が $a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n-n$ で定義されるとき，一般項 a_n を次の２通りの方法で求めよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を利用する。

(2)　$a_{n+1}-g(n+1)=2\{a_n-g(n)\}$ を満たす n の１次式 $g(n)$ を利用する。

６．次の条件で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$3na_{n+1}=(n+1)a_n$　　　(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}a_n+1$

7．$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n{}^2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

8．数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和 S_n と a_n の間に，$S_n=-2a_n-2n+5$ の関係があるとき

(1)　初項 a_1 を求めよ。

(2)　a_n，a_{n+1} の 2 項間の関係式を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

9．漸化式 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$，$a_1=3$，$a_2=5$ により定められる数列 $\{a_n\}$ について次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ に関する漸化式は $a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ と変形できる。
α，β $(\alpha>\beta)$ の値を求めよ。

(2)　(1) を用いて，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

10．$a_1=3$，$a_2=10$，$a_{n+2}=a_{n+1}+12a_n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　数列 $\{a_n\}$ に関する漸化式は，$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できる。α，β の値を求めよ。

(2)　(1) を用いて，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

11．漸化式 $a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$，$a_1=0$，$a_2=3$ により定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

12．数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が次のように定められるとき，次の問いに答えよ。

$a_1=4$，$b_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+b_n$ …… ①，$b_{n+1}=a_n+3b_n$ …… ②

(1)　数列 $\{a_n+b_n\}$，$\{a_n-b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

数学演習（漸化式）Ｈ２３．１２．１２　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1. 次の条件によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=4^n$　　　(2)　$a_1=-8,\ a_{n+1}-a_n=2n-1$

解答　(1)　$a_n=\dfrac{1}{3}(4^n-1)$　　(2)　$a_n=n^2-2n-7$

解説

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 4^n であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=1+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}=1+\frac{4^n-4}{3}=\frac{1}{3}(4^n-1)$$

また，初項は $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　$a_n=\dfrac{1}{3}(4^n-1)$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $2n-1$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=-8+2\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$$

$$=-8+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)=n^2-2n-7$$

また，初項は $a_1=-8$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　$a_n=n^2-2n-7$

2. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ \dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=3^{n-1}$　　　(2)　$a_1=\dfrac{1}{2},\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$

解答　(1)　$a_n=\dfrac{2}{3^{n-1}+1}$　　(2)　$a_n=\dfrac{1}{3n-1}$

解説

(1)　$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=b_{n+1}$　より　$b_{n+1}-b_n=3^{n-1}$

数列$\{b_n\}$の階差数列の一般項が3^{n-1}なので

$n\geqq 2$ のとき　　$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}$

$b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$ から　　$b_n=1+\dfrac{3^{n-1}-1}{3-1}=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$

$b_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$\dfrac{1}{a_n}=b_n$　より　$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$　から　$a_n=\dfrac{2}{3^{n-1}+1}$

(2)　$a_1=\dfrac{1}{2}>0$，および漸化式の形から，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ となる。

漸化式の両辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3a_n+1}{a_n}$

よって　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3a_n}{a_n}+\dfrac{1}{a_n}$　より　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=3+\dfrac{1}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+3$

これは数列$\{b_n\}$が公差3の等差数列であることを意味する

$b_1=2$ であるから　$b_n=2+(n-1)\cdot 3=3n-1$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{3n-1}$

3. 数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+3}$ により定められる。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=\dfrac{2}{5\cdot 3^{n-1}-4}$

解説

$a_1=2>0$，および漸化式の形から，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ となる。

両辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{4a_n+3}{a_n}$　すなわち　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=4+\dfrac{3}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n+4$

特性方程式から　$c=3c+4$　より　$c=-2$

$b_{n+1}=3b_n+4$ を変形して　$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$

数列 $\{b_n+2\}$ は，初項 $b_1+2=\dfrac{1}{a_1}+2=\dfrac{5}{2}$，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n+2=\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}$$

ゆえに，$b_n=\dfrac{5\cdot 3^{n-1}-4}{2}$ となり　$a_n=\dfrac{2}{5\cdot 3^{n-1}-4}$

4. 数列 $\{a_n\}$ が，次の条件によって定義されているとき，一般項 a_n を求めよ。

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$　　　(2)　$a_1=-30,\ 9a_{n+1}=a_n+\dfrac{4}{3^n}$

解答　(1)　$a_n=2^n n$　　(2)　$a_n=\dfrac{2}{3^n}-\dfrac{276}{9^n}$

解説

(1)　両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+1$

$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+1$

よって，数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{2}{2}=1$，公差 1 の等差数列となり

$$b_n=1+(n-1)\cdot 1=n$$

したがって　$a_n=2^n b_n=2^n n$

(2)　両辺に 3^n を掛けると　$9\cdot 3^n a_{n+1}=3^n a_n+4$

よって，　$3\cdot 3^{n+1}a_{n+1}=3^n a_n+4$

$3^n a_n=b_n$ とおくと　$3^{n+1}a_{n+1}=b_{n+1}$　となるので　$3b_{n+1}=b_n+4$

$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{4}{3}$ より特性方程式から　$c=\dfrac{1}{3}c+\dfrac{4}{3}$　より　$c=2$

$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{4}{3}$ を変形して　$b_{n+1}-2=\dfrac{1}{3}(b_n-2)$

ここで　$b_1-2=3a_1-2=-92$

ゆえに，数列 $\{b_n-2\}$ は，初項 -92，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列となり

$$b_n-2=-92\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって　$b_n=2-92\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

したがって　$3^n a_n=b_n$　より　$a_n=\dfrac{b_n}{3^n}=\dfrac{2}{3^n}-\dfrac{92}{3^{n-1}}\cdot\dfrac{1}{3^n}$

$$=\frac{2}{3^n}-\frac{92\cdot 3}{3^n}\cdot\frac{1}{3^n}$$

$$=\frac{2}{3^n}-\frac{276}{9^n}$$

5. 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n-n$ で定義されるとき，一般項 a_n を次の 2 通りの方法で求めよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を利用する。

(2)　$a_{n+1}-g(n+1)=2\{a_n-g(n)\}$ を満たす n の 1 次式 $g(n)$ を利用する。

解答　(1)　$a_n=2^{n-1}+n+1$　　(2)　$a_n=2^{n-1}+n+1$

解説

(1)　$a_{n+1}=2a_n-n$，nに$n+1$を代入して　$a_{n+2}=2a_{n+1}-(n+1)$

辺々引いて　$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)-1$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと$a_{n+2}-a_{n+1}=b_{n+1}$より　$b_{n+1}=2b_n-1$ …… ①

また　$b_1=a_2-a_1=(2a_1-1)-a_1=(2\cdot 3-1)-3=2$

① から　特性方程式より$c=2c-1$から$c=1$より

$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$　　また　$b_1-1=1$

ゆえに，数列 $\{b_n-1\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列となり

$b_n-1=1\cdot 2^{n-1}$　すなわち　$b_n=2^{n-1}+1$

よって，$a_{n+1}-a_n=2^{n-1}+1$　…②　となる。

数列$\{a_n\}$の階差数列の一般項が$2^{n-1}+1$なので　$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k-1}+1)=3+\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+(n-1)=2^{n-1}+n+1$$

$n=1$ とすると，$a_1=3$ となり適するから　$a_n=2^{n-1}+n+1$

別解　（②まで同じ）

問題文で与えられている漸化式$a_{n+1}=2a_n-n$を②に代入して

$(2a_n-n)-a_n=2^{n-1}+1$　より　$a_n=2^{n-1}+n+1$

(2)　$a_{n+1}=2a_n-n$ を変形して

$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=2\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$　…③

とできたとする。③を展開すると

$a_{n+1}=2a_n-\alpha n+\alpha-\beta$

となるので，$a_{n+1}=2a_n-n$　つまり　$a_{n+1}=2a_n+(-1)n+0$　と考えて

対応する項の係数が等しくなるので

$$\begin{cases}-\alpha=-1 & (n\text{の係数})\\ \alpha-\beta=0 & (\text{定数項})\end{cases}$$

よりαとβの連立方程式を解いて　$\alpha=1,\beta=1$となるので③に代入すると

$a_{n+1}-\{(n+1)+1\}=2\{a_n-(n+1)\}$

また　$b_n=a_n-(n+1)$　とおくと　$b_{n+1}=a_{n+1}-\{(n+1)+1\}$　となるので

$b_{n+1}=2b_n$　となり，これは数列$\{b_n\}$が公比2の等比数列であることを示す

$b_1=a_1-(1+1)=3-2=1$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ は，初項 1，公比 2 の等比数列となり　$b_n=1\cdot 2^{n-1}$

よって　$a_n-(n+1)=1\cdot 2^{n-1}$

したがって　$a_n=2^{n-1}+n+1$

6．次の条件で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$3na_{n+1}=(n+1)a_n$　　(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}a_n+1$

解答　(1)　$a_n=2n\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　　(2)　$a_n=\dfrac{n(3n+1)}{2}$

解説

(1)　$3na_{n+1}=(n+1)a_n$ の両辺を $n(n+1)$ で割ると

$$3\cdot\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$$

$\dfrac{a_n}{n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$

また　$b_1=\dfrac{a_1}{1}=2$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$b_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに　$a_n=nb_n=2n\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2)　$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}a_n+1$ の両辺を $(n+1)(n+2)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$\dfrac{a_n}{n(n+1)}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

よって　$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$　　また　$b_1=\dfrac{a_1}{2}=1$

ゆえに，数列$\{b_n\}$の階差数列の一般項が$\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$より

$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n-1)+1}-\frac{1}{(n-1)+2}\right)$$
$$=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3n+1}{2(n+1)}$$

$b_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　$b_n=\dfrac{3n+1}{2(n+1)}$ $(n\geqq 1)$

ゆえに　$a_n=n(n+1)b_n=n(n+1)\cdot\dfrac{3n+1}{2(n+1)}=\dfrac{n(3n+1)}{2}$

7．$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n{}^2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=2^{2^{n-1}-1}$

解説

$a_{n+1}=2a_n{}^2$，$a_1=1>0$ から，すべての自然数 n に対して　$a_n>0$

与えられた漸化式の両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2a_n{}^2$$

ここで　$\log_2 2a_n{}^2=\log_2 2+\log_2 a_n{}^2=2\log_2 a_n+1$

よって　$\log_2 a_{n+1}=2\log_2 a_n+1$

$\log_2 a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n+1$

変形して　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

$b_1=\log_2 a_1=0$ であるから　$b_1+1=1$

ゆえに，数列 $\{b_n+1\}$ は，初項 1，公比 2 の等比数列となり

$$b_n+1=2^{n-1}\quad すなわち\quad b_n=2^{n-1}-1$$

よって　$a_n=2^{b_n}=2^{2^{n-1}-1}$

8．数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和 S_n と a_n の間に，$S_n=-2a_n-2n+5$ の関係があるとき

(1)　初項 a_1 を求めよ。　　(2)　a_n，a_{n+1} の 2 項間の関係式を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1)　$a_1=1$　　(2)　$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n-\dfrac{2}{3}$　　(3)　$a_n=3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-2$

解説

(1)　$S_1=a_1$ であるから，$S_n=-2a_n-2n+5$ ……① において

$n=1$ とすると　$a_1=-2a_1-2\cdot 1+5$

よって　$a_1=1$

(2)　① からnに$n+1$を代入して　$S_{n+1}=-2a_{n+1}-2(n+1)+5$ ……②

②－① から　$S_{n+1}-S_n=-2a_{n+1}+2a_n-2$

$a_n=S_n-S_{n-1}$　より　$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ であるから

$$a_{n+1}=-2a_{n+1}+2a_n-2$$

ゆえに　$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n-\dfrac{2}{3}$

(3)　$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n-\dfrac{2}{3}$ を変形して　$a_{n+1}+2=\dfrac{2}{3}(a_n+2)$

よって，数列 $\{a_n+2\}$ は，初項 $a_1+2=3$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列である。

ゆえに　$a_n+2=3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

よって　$a_n=3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-2$

9．漸化式 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$，$a_1=3$，$a_2=5$ により定められる数列 $\{a_n\}$ について次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ に関する漸化式は $a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ と変形できる。α，β $(\alpha>\beta)$ の値を求めよ。

(2)　(1) を用いて，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1)　$\alpha=2$，$\beta=1$　　(2)　$a_n=2^n+1$

解説

(1)　$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ から　$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

これと $a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$ が一致することから　$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=2$

α，β は方程式 $x^2-3x+2=0$ の 2 つの解であるから

$$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$$

$\alpha>\beta$ から　$\alpha=2$，$\beta=1$

(2)　(1) から，与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$ ……①

また　$a_2-a_1=2$

① より，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n\quad ……②$$

よって，数列$\{a_n\}$の階差数列の一般項が2^nより

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=3+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^k=3+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+1$

$a_1=3$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに　$a_n=2^n+1$

別解　(1)より　$\alpha=1$，$\beta=2$　の場合も用いると

与えられた漸化式を変形して　$a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}-2a_n$ ……③

また　$a_2-2a_1=5-2\cdot 3=-1$

③ より，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 -1，公比 1 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-2a_n=(-1)\cdot 1^{n-1}=-1\quad …④$$

よって，②から④を引いて

$$a_n=2^n+1$$

10．$a_1=3$，$a_2=10$，$a_{n+2}=a_{n+1}+12a_n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　数列 $\{a_n\}$ に関する漸化式は，$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形できる。α，β の値を求めよ。

(2)　(1) を用いて，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1)　$(\alpha,\ \beta)=(-3,\ 4)$，$(4,\ -3)$　　(2)　$a_n=\dfrac{1}{7}\{19\cdot 4^{n-1}+2(-3)^{n-1}\}$

解説

(1)　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ から　$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

これと $a_{n+2}-a_{n+1}-12a_n=0$ が一致するから　$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-12$

よって，α，β は方程式 $x^2-x-12=0$ の 2 つの解である。

$x^2-x-12=0$ を解いて　$x=-3$，4

ゆえに　$(\alpha,\ \beta)=(-3,\ 4)$，$(4,\ -3)$

(2)　$\alpha=-3$，$\beta=4$ のとき　$a_{n+2}+3a_{n+1}=4(a_{n+1}+3a_n)$ ……①

また　$a_2+3a_1=19$

$\alpha=4$，$\beta=-3$ のとき　$a_{n+2}-4a_{n+1}=-3(a_{n+1}-4a_n)$ ……②

また　$a_2-4a_1=-2$

① より，数列 $\{a_{n+1}+3a_n\}$ は初項 19，公比 4 の等比数列であるから

$$a_{n+1}+3a_n=19\cdot 4^{n-1}\quad ……③$$

② より，数列 $\{a_{n+1}-4a_n\}$ は初項 -2，公比 -3 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-4a_n=(-2)\cdot(-3)^{n-1}\quad ……④$$

③－④ から　$7a_n=19\cdot 4^{n-1}-(-2)\cdot(-3)^{n-1}$

よって　$a_n=\dfrac{1}{7}\{19\cdot 4^{n-1}+2(-3)^{n-1}\}$

11．漸化式 $a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$，$a_1=0$，$a_2=3$ により定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=3^{n-1}(n-1)$

解説

$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$ から　$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$

よって，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 $a_2-3a_1=3$，公比 3 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-3a_n=3\cdot 3^{n-1}$$

ゆえに　$a_{n+1}-3a_n=3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{3}$

つまり，数列$\{b_n\}$は公差が$\dfrac{1}{3}$の等差数列である

また，$b_1=\dfrac{a_1}{3}=0$ であるから　$b_n=0+(n-1)\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{n-1}{3}$

よって　$a_n=3^nb_n=3^n\cdot\dfrac{n-1}{3}=3^{n-1}(n-1)$

12. 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が次のように定められるとき，次の問いに答えよ。

$a_1=4$，$b_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+b_n$ …… ①，$b_{n+1}=a_n+3b_n$ …… ②

(1)　数列 $\{a_n+b_n\}$，$\{a_n-b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1)　$a_n+b_n=5\cdot4^{n-1}$，$a_n-b_n=3\cdot2^{n-1}$

(2)　$a_n=\dfrac{1}{2}(5\cdot4^{n-1}+3\cdot2^{n-1})$，$b_n=\dfrac{1}{2}(5\cdot4^{n-1}-3\cdot2^{n-1})$

解説

(1)　①＋② から　$a_{n+1}+b_{n+1}=4(a_n+b_n)$

数列 $\{a_n+b_n\}$ は，初項 $a_1+b_1=5$，公比 4 の等比数列であるから

$$a_n+b_n=5\cdot4^{n-1}$$

①－② から　$a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)$

数列 $\{a_n-b_n\}$ は，初項 $a_1-b_1=3$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n-b_n=3\cdot2^{n-1}$$

(2)　(1) から　$a_n=\dfrac{1}{2}(5\cdot4^{n-1}+3\cdot2^{n-1})$，$b_n=\dfrac{1}{2}(5\cdot4^{n-1}-3\cdot2^{n-1})$

別解　① から　$b_n=a_{n+1}-3a_n$，nを$n+1$にして　$b_{n+1}=a_{n+2}-3a_{n+1}$

これらと ② から　$a_{n+2}-3a_{n+1}=a_n+3(a_{n+1}-3a_n)$

よって　$a_{n+2}-6a_{n+1}+8a_n=0$

特性方程式より　$t^2-6t+8=0$　から　$t=2, 4$

漸化式を変形すると　$\begin{cases}a_{n+2}-2a_{n+1}=4(a_{n+1}-2a_n)\\a_{n+2}-4a_{n+1}=2(a_{n+1}-4a_n)\end{cases}$

数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は，初項 $a_2-2a_1=5$，公比 4 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-2a_n=5\cdot4^{n-1}\quad\cdots\cdots ③$$

数列 $\{a_{n+1}-4a_n\}$ は，初項 $a_2-4a_1=-3$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-4a_n=-3\cdot2^{n-1}\quad\cdots\cdots ④$$

③，④ から　$a_n=\dfrac{1}{2}(5\cdot4^{n-1}+3\cdot2^{n-1})$

ゆえに，① から　$b_n=a_{n+1}-3a_n$

$$=\frac{1}{2}(5\cdot4^{(n+1)-1}+3\cdot2^{(n+1)-1})-3\cdot\frac{1}{2}(5\cdot4^{n-1}+3\cdot2^{n-1})$$

$$=\frac{1}{2}(5\cdot4\cdot4^{n-1}+3\cdot2\cdot2^{n-1})-\frac{3}{2}(5\cdot4^{n-1}+3\cdot2^{n-1})$$

$$=\frac{1}{2}(20\cdot4^{n-1}+6\cdot2^{n-1}-15\cdot4^{n-1}-9\cdot2^{n-1})$$

$$=\frac{1}{2}(5\cdot4^{n-1}-3\cdot2^{n-1})$$