数学演習（漸化式の応用）Ｈ２２．９．９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{3a_n}{a_n+3}$$

2．次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\quad \dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=3^{n-1}$

(2)　$a_1=\dfrac{1}{2},\quad a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$

3．数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+3}$ により定められる。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

4．$a_1=6$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ について

(1) $\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおいて，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

(2) (1) を利用して，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

5．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を，[ ] で示されたおき換えを利用することによって求めよ。

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$ $\left[\dfrac{1}{a_n}=b_n\right]$

(2) $a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n-2^{n+1}$ $\left[\dfrac{a_n}{2^n}=b_n\right]$

6．数列 $\{a_n\}$ が，次の条件によって定義されているとき，一般項 a_n を求めよ。

(1) $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$

(2) $a_1=-30$，$9a_{n+1}=a_n+\dfrac{4}{3^n}$

数学演習（漸化式の応用）Ｈ２２．９．９　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{3a_n}{a_n+3}$$

解答　$a_n=\dfrac{3}{n+2}$

解説

$a_1=1>0$ から，漸化式により　$a_2>0$，　また　$a_3>0$，……　一般に　$a_n>0$

よって，各項の逆数が存在して，漸化式から

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+3}{3a_n}\qquad \text{ゆえに}\qquad \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{3}$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{3}$　　また　$b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は，初項 1，公差 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列で　$b_n=1+(n-1)\cdot\dfrac{1}{3}$

よって　$b_n=\dfrac{n+2}{3}$　　$a_n=\dfrac{1}{b_n}$ から　$a_n=\dfrac{3}{n+2}$

2. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ \dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=3^{n-1}$　　　(2)　$a_1=\dfrac{1}{2},\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$

解答　(1)　$a_n=\dfrac{2}{3^{n-1}+1}$　　(2)　$a_n=\dfrac{1}{3n-1}$

解説

(1)　$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}-b_n=3^{n-1}$

$n\geqq 2$ のとき　$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}$

$b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$ から　$b_n=1+\dfrac{3^{n-1}-1}{3-1}=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$

$b_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\dfrac{2}{3^{n-1}+1}$

(2)　$a_1=\dfrac{1}{2}>0$，および漸化式の形から，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ となる。

漸化式の両辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3a_n+1}{a_n}$

よって　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=3+\dfrac{1}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+3$

$b_1=2$ であるから　$b_n=2+(n-1)\cdot 3=3n-1$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{3n-1}$

3. 数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+3}$ により定められる。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=\dfrac{2}{5\cdot 3^{n-1}-4}$

解説

$a_1=2>0$，および漸化式の形から，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ となる。

両辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{4a_n+3}{a_n}$　すなわち　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=4+\dfrac{3}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n+4$

$b_{n+1}=3b_n+4$ を変形して　$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$

数列 $\{b_n+2\}$ は，初項 $b_1+2=\dfrac{1}{a_1}+2=\dfrac{5}{2}$，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n+2=\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}$$

ゆえに，$b_n=\dfrac{5\cdot 3^{n-1}-4}{2}$ となり　$a_n=\dfrac{2}{5\cdot 3^{n-1}-4}$

4. $a_1=6$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおいて，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

(2)　(1) を利用して，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1)　$b_{n+1}=b_n+2$　　(2)　$a_n=2^n\cdot(2n+1)$

解説

(1)　$a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+2$$

$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+2$

(2)　(1) から　$b_{n+1}-b_n=2$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{6}{2}=3$，公差 2 の等差数列である。

ゆえに　$b_n=3+(n-1)\cdot 2=2n+1$

したがって　$a_n=2^nb_n=2^n\cdot(2n+1)$

5. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を，[ ] で示されたおき換えを利用することによって求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$　　$\left[\dfrac{1}{a_n}=b_n\right]$

(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n-2^{n+1}$　　$\left[\dfrac{a_n}{2^n}=b_n\right]$

解答　(1)　$a_n=\dfrac{1}{2n-1}$　　(2)　$a_n=2^n-4^{n-1}$

解説

(1)　$a_1=1>0$ より，漸化式の形からすべての自然数 n について $a_n>0$ である。

漸化式の両辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2a_n+1}{a_n}$　　よって　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=2+\dfrac{1}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+2$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公差 2 の等差数列で，初項は　$b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{1}=1$

ゆえに　$b_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$　　したがって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{2n-1}$

(2)　漸化式の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=2\cdot\dfrac{a_n}{2^n}-1$

$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n-1$

変形すると　$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$

よって，数列 $\{b_n-1\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は

$$b_1-1=\frac{a_1}{2^1}-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

ゆえに　$b_n-1=-\dfrac{1}{2}\cdot 2^{n-1}$　　よって　$b_n=1-2^{n-2}$

したがって　$a_n=2^nb_n=2^n(1-2^{n-2})=2^n-4^{n-1}$　…… ①

注意　① において　$2^n\times(-2^{n-2})=-2^{2n-2}=-2^{2(n-1)}=-(2^2)^{n-1}=-4^{n-1}$

6. 数列 $\{a_n\}$ が，次の条件によって定義されているとき，一般項 a_n を求めよ。

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$　　　(2)　$a_1=-30,\ 9a_{n+1}=a_n+\dfrac{4}{3^n}$

解答　(1)　$a_n=2^nn$　　(2)　$a_n=\dfrac{2}{3^n}-\dfrac{276}{9^n}$

解説

(1)　両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+1$

$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+1$

よって，数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1=1$，公差 1 の等差数列となり

$$b_n=1+(n-1)\cdot 1=n$$

したがって　$a_n=2^nb_n=2^nn$

(2)　両辺に 3^n を掛けると　$9\cdot 3^na_{n+1}=3^na_n+4$

$3^na_n=b_n$ とおくと　$3b_{n+1}=b_n+4$

$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{4}{3}$ を変形して　$b_{n+1}-2=\dfrac{1}{3}(b_n-2)$

ここで　$b_1-2=3a_1-2=-92$

ゆえに，数列 $\{b_n-2\}$ は，初項 -92，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列となり

$$b_n-2=-92\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって　$b_n=2-92\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

したがって　$a_n=\dfrac{b_n}{3^n}=\dfrac{2}{3^n}-\dfrac{92\cdot 3}{3^n}\cdot\dfrac{1}{3^n}=\dfrac{2}{3^n}-\dfrac{276}{9^n}$