数学演習（数学的帰納法）Ｈ２２．９．１７　　(　)組(　)番　名前(　　　　　　)

1．n が自然数のとき，次の等式を数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1)　$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$

(2)　$1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\cdots\cdots+n(2n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$

(3)　$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$

2．n が自然数のとき，次のことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1)　$4n^3-n$ は 3 の倍数である。

(2)　6^n-1 は 5 の倍数である。

3．(1)　n は自然数とする。$2n^3-3n^2+n$ が 6 で割り切れることを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

(2)　n が自然数のとき，$3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 の倍数であることを証明せよ。

4．n が自然数のとき，次の不等式を証明せよ。

(1)　$5^n > 4n$

(2)　$n \geqq 3$ のとき　$3^n > 5n+1$

(3)　$2^n > 3n+1$　$(n \geqq 4)$

5．$a_1 = -1$，$a_{n+1} = a_n{}^2 + 2na_n - 2$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　第 n 項 a_n を推測して，それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

6．$a_1 = 3$，$(n+1)a_{n+1} = a_n{}^2 - 1$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

1．n が自然数のとき，次の等式を数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1)　$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$

(2)　$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+n(2n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$

(3)　$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot2n=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　この等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　(左辺)$=1$,　(右辺)$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$

よって，$n=1$ のとき，① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3k-2)=\frac{1}{2}k(3k-1)$$

であると仮定すると，$n=k+1$ のときの ① の左辺は

$$\begin{aligned}&1+4+7+\cdots\cdots+\{3(k+1)-2\}\\&=1+4+7+\cdots\cdots+(3k-2)+\{3(k+1)-2\}\\&=\frac{1}{2}k(3k-1)+\{3(k+1)-2\}=\frac{1}{2}(3k^2+5k+2)\\&=\frac{1}{2}(k+1)(3k+2)=\frac{1}{2}(k+1)\{3(k+1)-1\}\end{aligned}$$

よって　　$1+4+7+\cdots\cdots+\{3(k+1)-2\}=\frac{1}{2}(k+1)\{3(k+1)-1\}$

ゆえに，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

(2)　この等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　(左辺)$=3$,　(右辺)$=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot9=3$

よって，$n=1$ のとき，① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+k(2k+1)=\frac{1}{6}k(k+1)(4k+5)$$

であると仮定すると，$n=k+1$ のときの ① の左辺は

$$\begin{aligned}&1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+(k+1)\{2(k+1)+1\}\\&=1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+k(2k+1)+(k+1)\{2(k+1)+1\}\\&=\frac{1}{6}k(k+1)(4k+5)+(k+1)\{2(k+1)+1\}=\frac{1}{6}(k+1)\{k(4k+5)+6(2k+3)\}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(4k^2+17k+18)\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+9)=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)+5\}\end{aligned}$$

よって　　$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+(k+1)\{2(k+1)+1\}$

$$=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)+5\}$$

したがって，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

(3)　この等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　(左辺)$=1+1=2$,　(右辺)$=2^1\cdot1=2$

よって，$n=1$ のとき，① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot2k=2^k\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)$$

であると仮定すると，$n=k+1$ のときの ① の左辺は

$$\begin{aligned}&(k+2)(k+3)(k+4)\cdot\cdots\cdots\cdot\{2(k+1)\}\\&=(k+2)(k+3)(k+4)\cdot\cdots\cdots\cdot(2k+2)\qquad(2k+2\text{の前には}2k+1\text{で，その前は}2k)\\&=(k+2)(k+3)(k+4)\cdot\cdots\cdots\cdot2k(2k+1)(2k+2)\\&=(k+2)(k+3)(k+4)\cdot\cdots\cdots\cdot2k\times(2k+1)\times(2k+2)\\&=(k+2)(k+3)(k+4)\cdot\cdots\cdots\cdot2k\times(2k+1)\times\{2(k+1)\}\qquad(\text{順番を変える})\\&=\{2(k+1)\}\times(k+2)(k+3)(k+4)\cdot\cdots\cdots\cdot2k\times(2k+1)\\&=2\times(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\cdot\cdots\cdots\cdot2k\times(2k+1)\\&=2\times2^k\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)\times(2k+1)\\&=2^{k+1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)\\&=2^{k+1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)\cdot\{2(k+1)-1\}\end{aligned}$$

よって　　$(k+2)(k+3)(k+4)\cdot\cdots\cdots\cdot\{2(k+1)\}=2^{k+1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot\{2(k+1)-1\}$

ゆえに，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

2．n が自然数のとき，次のことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1)　$4n^3-n$ は 3 の倍数である。　　(2)　6^n-1 は 5 の倍数である。

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　[1]　$n=1$ のとき　　$4\cdot1^3-1=3$

よって，$n=1$ のとき，$4n^3-n$ は 3 の倍数である。

[2]　$n=k$ のとき $4n^3-n$ は 3 の倍数であると仮定する。

このとき，整数 m を用いて $4k^3-k=3m$ と表され　　$4k^3=3m+k$

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}4(k+1)^3-(k+1)&=4k^3+12k^2+11k+3\\&=(3m+k)+12k^2+11k+3\\&=3(m+4k^2+4k+1)\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $4n^3-n$ は 3 の倍数である。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について $4n^3-n$ は 3 の倍数である。

(2)　[1]　$n=1$ のとき　　$6^1-1=5$

よって，$n=1$ のとき，6^n-1 は 5 の倍数である。

[2]　$n=k$ のとき 6^n-1 は 5 の倍数であると仮定する。

このとき，整数 m を用いて $6^k-1=5m$ と表され　　$6^k=5m+1$

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}6^{k+1}-1&=6\cdot6^k-1=6(5m+1)-1\\&=5(6m+1)\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも 6^n-1 は 5 の倍数である。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について 6^n-1 は 5 の倍数である。

3．(1)　n は自然数とする。$2n^3-3n^2+n$ が 6 で割り切れることを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

(2)　n が自然数のとき，$3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 の倍数であることを証明せよ。

解答　(1)　略　(2)　略

解説

(1)　[1]　$n=1$ のとき　　$2\cdot1^3-3\cdot1^2+1=0$

よって，$n=1$ のとき $2n^3-3n^2+n$ は 6 で割り切れる。

[2]　$n=k$ のとき，$2n^3-3n^2+n$ が 6 で割り切れると仮定する。

このとき，整数 m を用いて，$2k^3-3k^2+k=6m$ と表され

$$2k^3=6m+3k^2-k$$

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}2(k+1)^3-3(k+1)^2+(k+1)&=2k^3+3k^2+k=(6m+3k^2-k)+3k^2+k\\&=6(m+k^2)\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $2n^3-3n^2+n$ は 6 で割り切れる。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について $2n^3-3n^2+n$ は 6 で割り切れる。

(2)　[1]　$n=1$ のとき　　$3^{1+1}+4^{2\cdot1-1}=13$

よって，$n=1$ のとき，$3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 の倍数である。

[2]　$n=k$ のとき $3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 の倍数であると仮定する。

このとき，整数 m を用いて $3^{k+1}+4^{2k-1}=13m$ と表され　　$3^{k+1}=13m-4^{2k-1}$

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}3^{(k+1)+1}+4^{2(k+1)-1}&=3^{k+2}+4^{2k+1}\\&=3\cdot3^{k+1}+4^{2k+1}\\&=3(13m-4^{2k-1})+4^2\cdot4^{2k-1}\\&=39m-3\cdot4^{2k-1}+16\cdot4^{2k-1}\\&=39m+4^{2k-1}(-3+16)\\&=39m+4^{2k-1}\cdot13\\&=13(3m+4^{2k-1})\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 の倍数である。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について $3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 の倍数である。

4．n が自然数のとき，次の不等式を証明せよ。

(1)　$5^n>4n$　　(2)　$n\geqq3$ のとき　$3^n>5n+1$

(3)　$2^n>3n+1$　$(n\geqq4)$

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略

解説

(1)　この不等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　(左辺)$=5^1=5$，　(右辺)$=4\cdot1=4$

よって，$n=1$ のとき ① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$5^k>4k$ …… ②

であると仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② により

$$\begin{aligned}5^{k+1}-4(k+1)&=5^{k+1}-(4k+4)\\&=5\cdot5^k-(4k+4)\\&>5\cdot4k-(4k+4)\quad(②より)\\&=20k-(4k+4)=20k-4k-4=16k-4\end{aligned}$$

ここで，kは自然数より，どんな自然数kにおいても$16k-4>0$である。

よって　$5^{k+1}>4(k+1)$

ゆえに，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

(2)　この不等式を ① とする。

[1]　$n=3$ のとき　(左辺)$=3^3=27$，　(右辺)$=5\cdot3+1=16$

よって，$n=3$ のとき ① が成り立つ。

[2]　$n=k\,(k\geqq3)$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$3^k>5k+1$ …… ②

であると仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② により

$$\begin{aligned}3^{k+1}-\{5(k+1)+1\}&=3^{k+1}-(5k+6)\\&=3\cdot3^k-(5k+6)\\&>3\cdot(5k+1)-(5k+6)\quad(②より)\\&=(15k+3)-(5k+6)=10k-3\end{aligned}$$

ここで，kは３以上の自然数より，３以上のどんな自然数kにおいても

$10k-3>0$である。

よって　$3^{k+1}>5(k+1)+1$　が成り立つ。

ゆえに，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，$n\geqq3$ であるすべての自然数 n について ① が成り立つ。

(3)　$2^n>3n+1$　…… ①

[1]　$n=4$ のとき　左辺$=2^4=16$，　右辺$=3\cdot4+1=13$

よって，$n=4$ のとき ① は成り立つ。

[2]　$n=k$ $(k\geqq4)$ のとき ① が成り立つ，すなわち　$2^k>3k+1$　…… ②　と仮定する。

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② により

$$\begin{aligned}2^{k+1}-\{3(k+1)+1\}&=2\cdot2^k-(3k+4)\\&>2(3k+1)-(3k+4)=3k-2\end{aligned}$$

$k\geqq4$ であるから　$3k-2>0$　　よって　$2^{k+1}>3(k+1)+1$

ゆえに，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

[1]，[2] から，n が 4 以上の自然数のとき，① が成り立つ。

5．$a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n{}^2+2na_n-2$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　第 n 項 a_n を推測して，それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

解答　(1)　$a_2=-3$，$a_3=-5$，$a_4=-7$　　(2)　$a_n=-2n+1$，証明略

解説

(1)　$a_2=(-1)^2+2\cdot1\cdot(-1)-2=-3$，$a_3=(-3)^2+2\cdot2\cdot(-3)-2=-5$，

$a_4=(-5)^2+2\cdot3\cdot(-5)-2=-7$

(2)　(1) から，$a_n=-2n+1$　…… ① と推測できる。

[1]　$n=1$ のとき　$a_1=-2\cdot1+1=-1$

よって，$n=1$ のとき，① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると　$a_k=-2k+1$

$n=k+1$ のとき　$a_{k+1}=a_k{}^2+2ka_k-2=(-2k+1)^2+2k(-2k+1)-2$

$=-2k-1=-2(k+1)+1$

よって，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

6．$a_1=3$，$(n+1)a_{n+1}=a_n{}^2-1$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

解答　$a_n=n+2$，証明略

解説

$(n+1)a_{n+1}=a_n{}^2-1$ から　$a_{n+1}=\dfrac{a_n{}^2-1}{n+1}$

よって　$a_1=3$，$a_2=\dfrac{3^2-1}{1+1}=4$，$a_3=\dfrac{4^2-1}{2+1}=5$，$a_4=\dfrac{5^2-1}{3+1}=6$

したがって，$a_n=n+2$ …… ① と推測できる。

[1]　$n=1$ のとき　$a_1=1+2=3$

よって，$n=1$ のとき，① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると　$a_k=k+2$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\frac{a_k{}^2-1}{k+1}=\frac{(k+2)^2-1}{k+1}\\&=\frac{(k+1)(k+3)}{k+1}\\&=k+3\\&=(k+1)+2\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。