数学演習（数学的帰納法）Ｈ２３．１２．１７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

1．すべての自然数 n に対して，次の等式が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ。

$$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots\cdots+n(n+2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$$

2．n が自然数のとき，数学的帰納法によって，次の等式

$$1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)\quad\cdots\cdots①$$

を証明せよ。

3．n は自然数とする。数学的帰納法によって，次の等式を証明せよ。

(1) $1+2\cdot\frac{3}{2}+3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots\cdots+n\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=2(n-2)\left(\frac{3}{2}\right)^n+4$

(2) $(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$

4．n は自然数とする。このとき 11^n-1 は 10 の倍数であることを，数学的帰納法によって証明せよ。

5．n を自然数とする。次のことを数学的帰納法によって証明せよ。

(1) $(n+1)(n+2)$ は 2 の倍数　　(2) n^3+3n^2+2n は 6 の倍数

6．すべての自然数 n について，$4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数であることを証明せよ。

7．n が 2 以上の自然数であるとき，不等式 $3^n>2n+1$ が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。

8．n が 5 以上の自然数であるとき，不等式 $2^n>n^2$ が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ。

9．$a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n{}^2+2na_n-2$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，一般項 a_n を推測し，それが正しいことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

10. 条件 $a_1=3$，$a_n{}^2=(n+1)a_{n+1}+1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　第 n 項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

11. 漸化式 $a_1=4$，$a_{n+1}=3a_n{}^2+4a_n+3$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ で定まる整数の数列 $\{a_n\}$ を考える。このとき，a_n-4 は 7 で割り切れることを証明せよ。

数学演習（数学的帰納法）Ｈ２３．１２．１７　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．すべての自然数 n に対して，次の等式が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ。 $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots\cdots+n(n+2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

解答　略

解説

等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=1\cdot3=3,\ (\text{右辺})=\frac{1}{6}\cdot1\cdot(1+1)(2\cdot1+7)=3$$

ゆえに，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき　① が成り立つと仮定すると

$$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots\cdots+k(k+2)=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+7)$$

が成り立つ。ここで $n=k+1$ のときの(左辺)は

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(k+1)\{(k+1)+2\}\\&=1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots\cdots+k(k+2)+(k+1)(k+3)\\&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+7)+(k+1)(k+3)\quad(\text{仮定より})\\&=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+7)+6(k+3)\}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+9)\\&=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+7\}=(\text{右辺})\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について等式 ① は成り立つ。

２．n が自然数のとき，数学的帰納法によって，次の等式

$$1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)\quad\cdots\cdots①$$

を証明せよ。

解答　略

解説

[1]　$n=1$ のとき

$(\text{左辺})=1,\ (\text{右辺})=\frac{1}{2}(3^1-1)=1$

ゆえに，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると

$$1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{k-1}=\frac{1}{2}(3^k-1)\quad\cdots\cdots②$$

$n=k+1$ の場合の(左辺)を考えると

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=1+3+3^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+3^{(k+1)-1}\\&=1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{k-1}+3^k\\&=\frac{1}{2}(3^k-1)+3^k\quad(②\text{より})\\&=\frac{1}{2}(3^k-1+2\cdot3^k)\\&=\frac{1}{2}\{(1+2)\cdot3^k-1\}\\&=\frac{1}{2}(3\cdot3^k-1)\\&=\frac{1}{2}(3^{k+1}-1)=(\text{右辺})\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] により，すべての自然数 n について等式 ① は成り立つ。

３．n は自然数とする。数学的帰納法によって，次の等式を証明せよ。

(1)　$1+2\cdot\frac{3}{2}+3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots\cdots+n\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=2(n-2)\left(\frac{3}{2}\right)^n+4$

(2)　$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$1+2\cdot\frac{3}{2}+3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots\cdots+n\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=2(n-2)\left(\frac{3}{2}\right)^n+4$ ……①とする。

[1]　$n=1$ のとき　　左辺$=1$，　右辺$=2\cdot(-1)\cdot\frac{3}{2}+4=1$

よって，$n=1$ のとき ① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1+2\cdot\frac{3}{2}+\cdots\cdots+k\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=2(k-2)\left(\frac{3}{2}\right)^k+4\quad\cdots\cdots②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=1+2\cdot\frac{3}{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k\\&=1+2\cdot\frac{3}{2}+\cdots\cdots+k\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}+(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k\\&=2(k-2)\left(\frac{3}{2}\right)^k+4+(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k\quad(②\text{より})\\&=\{2(k-2)+(k+1)\}\left(\frac{3}{2}\right)^k+4\\&=(3k-3)\left(\frac{3}{2}\right)^k+4\\&=3(k-1)\left(\frac{3}{2}\right)^k+4\\&=(k-1)\cdot2\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^k+4\\&=2(k-1)\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}+4=(\text{右辺})\end{aligned}$$

ゆえに，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

[1]，[2] から，① はすべての自然数 n について成り立つ。

(2)　$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$ ……①

[1]　$n=1$ のとき　　左辺$=2$，　右辺$=2^1\cdot1=2$

(左辺は$n+1$から$2n$までn個なので$n=1$を代入して2から2まで1個，つまり2のみ)

よって，$n=1$ のとき ① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$(k+1)(k+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(2k)=2^k\cdot1\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)\quad\cdots\cdots②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，

$\{(k+1)+1\}\{(k+1)+2\}\cdot\cdots\cdots\cdots\cdot\{2(k+1)\}$となる。つまり

$(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot(2k+2)$となり，これは$k+2$から$2k+2$までのすべての自然数の積である。ここで

$$(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(2k)\cdot(2k+1)(2k+2)$$

と考え，また②より両辺を$k+1$で割って

$$(k+2)(k+3)\cdots\cdots\cdots(2k)=\frac{2^k\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)}{k+1}$$

とすると

$$\begin{aligned}&(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(2k)\cdot(2k+1)(2k+2)\\&=\frac{2^k\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)}{k+1}\cdot(2k+1)(2k+2)\\&=\frac{2^k\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)}{k+1}\cdot(2k+1)2(k+1)\quad(2k+2\text{を因数分解})\\&=2^k\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)(2k+1)\cdot2\quad(\text{両辺}k+1\text{で割る})\\&=2^{k+1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)(2k+1)\quad(2\text{の指数を増やす})\\&=2^{k+1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)\{2(k+1)-1\}\end{aligned}$$

ゆえに，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

[1]，[2] から，① はすべての自然数 n について成り立つ。

４．n は自然数とする。このとき 11^n-1 は 10 の倍数であることを，数学的帰納法によって証明せよ。

解答　略

解説

事柄「11^n-1 は 10 の倍数である」を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　$11^1-1=10$

よって，$n=1$ のとき ① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると，m を整数として，

$11^k-1=10m$，つまり $11^k-1=10m$ と表される。

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}11^{k+1}-1&=11\cdot11^k-1=11(10m+1)-1\\&=110m+10=10(11m+1)\end{aligned}$$

$11m+1$ は整数であるから，$11^{k+1}-1$ は 10 の倍数となり，$n=k+1$ のときにも ① が成り立つ。

[1]，[2] により，① はすべての自然数 n について成り立つ。

５．n を自然数とする。次のことを数学的帰納法によって証明せよ。

(1)　$(n+1)(n+2)$ は 2 の倍数　　　(2)　n^3+3n^2+2n は 6 の倍数

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　事柄「$(n+1)(n+2)$ は 2 の倍数」を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　$2\cdot3=6$ で ① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つとすると

$(k+1)(k+2)=2p$（p は整数）

とおける。

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}\{(k+1)+1\}\{(k+2)+1\}&=(k+1)(k+2)+\{(k+1)+(k+2)\}+1\\&=2p+2(k+2)=2(p+k+2)\end{aligned}$$

$p+k+2$ は整数であるから，$\{(k+1)+1\}\{(k+1)+2\}$ は 2 の倍数となり，$n=k+1$ のときにも ① が成り立つ。

[1], [2] により，① はすべての自然数 n について成り立つ。

(2) 事柄「n^3+3n^2+2n は6の倍数」を ② とする。

[1] $n=1$ のとき $1^3+3\cdot1^2+2\cdot1=6$ で ② が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，② が成り立つとすると

$$k^3+3k^2+2k=6q \ (q \text{ は整数})$$

とおける。

$n=k+1$ のとき

$$(k+1)^3+3(k+1)^2+2(k+1)=(k^3+3k^2+2k)+3k^2+9k+6$$
$$=6q+3(k+1)(k+2)$$

(1) より，$(k+1)(k+2)=2p$ (p は整数) とおけるから

$$6q+3(k+1)(k+2)=6q+3\cdot2p=6(p+q)$$

$p+q$ は整数であるから，$(k+1)^3+3(k+1)^2+2(k+1)$ は6の倍数となり，$n=k+1$ のときにも ② が成り立つ。

[1], [2] により，② はすべての自然数 n について成り立つ。

参考 (1)は連続する２整数の積であるから，２整数のどちらかは偶数になるので
かならず2の倍数となる

6．すべての自然数 n について，$4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数であることを証明せよ。

解答 略

解説

「$4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数である」を ① とする。

[1] $n=1$ のとき $4^{2\cdot1+1}+3^{1+2}=64+27=91=13\cdot7$

よって，① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$$4^{2k+1}+3^{k+2}=13m \ (m \text{ は整数}) \cdots\cdots ② \quad \text{とおける。}$$

$n=k+1$ のときを考えると，② から $4^{2k+1}=13m-3^{k+2}$ より

$$4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}=4^2\cdot4^{2k+1}+3^{k+3}=16(13m-3^{k+2})+3^{k+3}$$
$$=16(13m-3^{k+2})+3\cdot3^{k+2}$$
$$=13\cdot16m-(16-3)\cdot3^{k+2}=13(16m-3^{k+2})$$

$16m-3^{k+2}$ は整数であるから，$4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}$ は 13 の倍数である。

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1], [2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

7．n が 2 以上の自然数であるとき，不等式 $3^n>2n+1$ が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。

解答 略

解説

$3^n>2n+1$ ……① とする。

[1] $n=2$ のとき

$$(\text{左辺})=3^2=9,\ (\text{右辺})=2\cdot2+1=5$$

ゆえに，不等式 ① は $n=2$ のとき成り立つ。

[2] $k\geqq2$ として，$n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると

$$3^k>2k+1$$

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると

$$3^{k+1}-\{2(k+1)+1\}=3\cdot3^k-(2k+3)$$
$$>3(2k+1)-(2k+3) \quad \cdots\cdots②$$
$$=4k>0$$

すなわち $3^{k+1}>2(k+1)+1$

よって，$n=k+1$ のときにも不等式 ① は成り立つ。

[1], [2] により，不等式 ① は 2 以上のすべての自然数 n について成り立つ。

参考 ②において

①から $3^k>2k+1$ より 両辺を3倍して

$3\cdot3^k>3(2k+1)$ 両辺から$2k+3$を引いて

$3\cdot3^k-(2k+3)>3(2k+1)-(2k+3)$

が成り立つ。

8．n が 5 以上の自然数であるとき，不等式 $2^n>n^2$ が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ。

解答 略

解説

$2^n>n^2$ ……① とする。

[1] $n=5$ のとき (左辺)$=2^5=32$，(右辺)$=5^2=25$

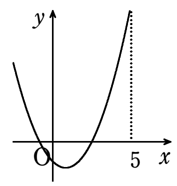
ゆえに，不等式 ① は $n=5$ のとき成り立つ。

[2] $k\geqq5$ として，$n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると

$$2^k>k^2$$

$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると

$$2^{k+1}-(k+1)^2=2\cdot2^k-(k^2+2k+1)$$
$$>2\cdot k^2-(k^2+2k+1) \quad \cdots\cdots②$$
$$=k^2-2k-1$$



$k\geqq5$ より $k^2-2k-1=(k-1)^2-2>0$ であるから

$$2^{k+1}>(k+1)^2$$

よって，$n=k+1$ のときにも不等式 ① は成り立つ。

[1], [2] により，不等式 ① は 5 以上のすべての自然数 n について成り立つ。

参考 ②について

①から $2^k>k^2$ より 両辺を2倍して

$2\cdot2^k>2k^2$ 両辺からk^2+2k+1を引いて

$2\cdot2^k-(k^2+2k+1)>2k^2-(k^2+2k+1)$

が成り立つ。

9．$a_1=-1$，$a_{n+1}={a_n}^2+2na_n-2$ ($n=1$，2，3，……) で定義される数列 $\{a_n\}$ について，一般項 a_n を推測し，それが正しいことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

解答 $a_n=-2n+1$，証明略

解説

$$a_1=-1,\ a_2={a_1}^2+2\cdot1\cdot a_1-2=-3$$
$$a_3={a_2}^2+2\cdot2\cdot a_2-2=-5$$
$$a_4={a_3}^2+2\cdot3\cdot a_3-2=-7$$

ゆえに，$a_n=-2n+1$ ……① と推測される。

すべての自然数 n について，① が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき，① で $n=1$ とすると $a_1=-1$

よって，① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると $a_k=-2k+1$

$n=k+1$ のとき，与えられた漸化式から

$$a_{k+1}=(a_k)^2+2ka_k-2$$
$$=(-2k+1)^2+2k(-2k+1)-2=-2k-1$$
$$=-2(k+1)+1$$

したがって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1], [2] により，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

10．条件 $a_1=3$，${a_n}^2=(n+1)a_{n+1}+1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2) 第 n 項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

解答 (1) $a_2=4$，$a_3=5$，$a_4=6$ (2) 証明略。$a_n=n+2$

解説

(1) $3^2=2a_2+1$ から $a_2=4$， $4^2=3a_3+1$ から $a_3=5$

$5^2=4a_4+1$ から $a_4=6$

(2) (1) から，$a_n=n+2$ ……① であると推測される。

[1] $n=1$ のとき，明らかに ① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち $a_k=k+2$ ……② と仮定する。

${a_k}^2=(k+1)a_{k+1}+1$ であるから，② により

$$(k+2)^2=(k+1)a_{k+1}+1$$

ゆえに $k^2+4k+3=(k+1)a_{k+1}$

すなわち $(k+1)(k+3)=(k+1)a_{k+1}$

両辺を $k+1\,(\neq0)$ で割ると $a_{k+1}=k+3=(k+1)+2$

よって，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

[1], [2] から，① はすべての自然数 n について成り立つ。

11．漸化式 $a_1=4$，$a_{n+1}=3{a_n}^2+4a_n+3$ ($n=1$，2，……) で定まる整数の数列 $\{a_n\}$ を考える。このとき，a_n-4 は 7 で割り切れることを証明せよ。

解答 略

解説

「a_n-4 は 7 で割り切れる」を ① とする。

[1] $n=1$ のとき $a_1-4=4-4=0$

よって，0は7 で割り切れるから，① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$$a_k-4=7m \ (m \text{ は整数}) \cdots\cdots ② \quad \text{とおける。}$$

$n=k+1$ のときを考えると，② から$a_k=7m+4$ ，また漸化式より

$$a_{k+1}-4=(3{a_k}^2+4a_k+3)-4=3{a_k}^2+4a_k-1$$
$$=3(7m+4)^2+4(7m+4)-1$$
$$=147m^2+196m+63=7(21m^2+28m+9)$$

$21m^2+28m+9$ は整数であるから，$a_{k+1}-4$ は 7 で割り切れる。

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1], [2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。