数学演習（数学的帰納法）Ｈ２４．１１．１６　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　)

１. n が自然数のとき，次の等式を数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1) $1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$

(2) $1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+n(2n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$

２. n が自然数のとき，次の不等式を証明せよ。

(1) $5^n>4n$

(2) $n\geqq3$ のとき　$3^n>5n+1$

３. n が自然数のとき，次のことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1) $4n^3-n$ は3の倍数である。

(2) 6^n-1 は5の倍数である。

4. n が自然数のとき，$3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 の倍数であることを証明せよ。

5. $a_1=3$,（$(n+1)a_{n+1}=a_n{}^2-1$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

6. $a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n{}^2+2na_n-2$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ について

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2) 第 n 項 a_n を推測して，それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

数学演習（数学的帰納法）Ｈ２４．１１．１６

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

1． n が自然数のとき，次の等式を数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1)　$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\dfrac{1}{2}n(3n-1)$

(2)　$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+n(2n+1)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$

解答　(1)　略　　(2)　略

(1)　この等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　(左辺)$=1$,　(右辺)$=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$

よって，$n=1$ のとき，① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3k-2)=\frac{1}{2}k(3k-1)$$

であると仮定すると，$n=k+1$ のときの ① の左辺は

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3k-2)+\{3(k+1)-2\}$$

$$=\frac{1}{2}k(3k-1)+\{3(k+1)-2\}=\frac{1}{2}(3k^2+5k+2)=\frac{1}{2}(k+1)(3k+2)$$

よって　$1+4+7+\cdots\cdots+\{3(k+1)-2\}=\dfrac{1}{2}(k+1)\{3(k+1)-1\}$

ゆえに，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

(2)　この等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　(左辺)$=3$,　(右辺)$=\dfrac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot9=3$

よって，$n=1$ のとき，① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+k(2k+1)=\frac{1}{6}k(k+1)(4k+5)$$

であると仮定すると，$n=k+1$ のときの ① の左辺は

$$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+k(2k+1)+(k+1)\{2(k+1)+1\}$$

$$=\frac{1}{6}k(k+1)(4k+5)+(k+1)\{2(k+1)+1\}=\frac{1}{6}(k+1)\{k(4k+5)+6(2k+3)\}$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(4k^2+17k+18)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+9)$$

よって　$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+(k+1)\{2(k+1)+1\}$

$$=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)+5\}$$

したがって，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

2． n が自然数のとき，次の不等式を証明せよ。

(1)　$5^n>4n$　　　(2)　$n\geqq3$ のとき　$3^n>5n+1$

解答　(1)　略　　(2)　略

(1)　この不等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　(左辺)$=5^1=5$,　(右辺)$=4\cdot1=4$

よって，$n=1$ のとき ① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$5^k>4k$$

であると仮定する。$n=k+1$ のときの①の両辺の差を考えると

$$5^{k+1}-4(k+1)=5\cdot5^k-4(k+1)$$
$$>5\cdot4k-4(k+1)$$
$$=16k-4>0\qquad(k\geqq1 \text{より})$$

すなわち　$5^{k+1}>4(k+1)$

ゆえに，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

(2)　この不等式を ① とする。

[1]　$n=3$ のとき　　(左辺)$=3^3=27$,　(右辺)$=5\cdot3+1=16$

よって，$n=3$ のとき ① が成り立つ。

[2]　$n=k\ (k\geqq3)$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$3^k>5k+1$$

であると仮定する。$n=k+1$ のときの①の両辺の差を考えると

$$3^{k+1}-\{5(k+1)+1\}=3\cdot3^k-(5k+6)$$
$$>3\cdot(5k+1)-(5k+6)$$
$$=15k+3-5k-6=10k-3>0\qquad(k\geqq3 \text{より})$$

すなわち　$3^{k+1}>5(k+1)+1$

ゆえに，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，$n\geqq3$ であるすべての自然数 n について ① が成り立つ。

3． n が自然数のとき，次のことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1)　$4n^3-n$ は 3 の倍数である。　　(2)　6^n-1 は 5 の倍数である。

解答　(1)　略　　(2)　略

(1)　[1]　$n=1$ のとき　　$4\cdot1^3-1=3$

よって，$n=1$ のとき，$4n^3-n$ は 3 の倍数である。

[2]　$n=k$ のとき $4n^3-n$ は 3 の倍数であると仮定する。

このとき，整数 m を用いて $4k^3-k=3m$ と表され　　$4k^3=3m+k$

$n=k+1$ のときを考えると

$$4(k+1)^3-(k+1)=4k^3+12k^2+11k+3$$
$$=(3m+k)+12k^2+11k+3$$
$$=3(m+4k^2+4k+1)$$

よって，$n=k+1$ のときも $4n^3-n$ は 3 の倍数である。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について $4n^3-n$ は 3 の倍数である。

(2)　[1]　$n=1$ のとき　　$6^1-1=5$

よって，$n=1$ のとき，6^n-1 は 5 の倍数である。

[2]　$n=k$ のとき 6^n-1 は 5 の倍数であると仮定する。

このとき，整数 m を用いて $6^k-1=5m$ と表され　　$6^k=5m+1$

$n=k+1$ のときを考えると

$$6^{k+1}-1=6\cdot6^k-1=6(5m+1)-1$$
$$=5(6m+1)$$

よって，$n=k+1$ のときも 6^n-1 は 5 の倍数である。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について 6^n-1 は 5 の倍数である。

4．n が自然数のとき，$3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 の倍数であることを証明せよ。

解答　略

[1]　$n=1$ のとき　　$3^{1+1}+4^{2\cdot1-1}=13$

よって，$n=1$ のとき，$3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 の倍数である。

[2]　$n=k$ のとき $3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 の倍数であると仮定する。

このとき，整数 m を用いて $3^{k+1}+4^{2k-1}=13m$ と表され　　$3^{k+1}=13m-4^{2k-1}$

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}3^{(k+1)+1}+4^{2(k+1)-1}&=3\cdot3^{k+1}+4^{2k+1}=3(13m-4^{2k-1})+4^2\cdot4^{2k-1}\\&=39m-3\cdot4^{2k-1}+16\cdot4^{2k-1}\\&=39m+(16-3)\cdot4^{2k-1}\\&=39m+13\cdot4^{2k-1}\\&=13(3m+4^{2k-1})\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 の倍数である。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について $3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 の倍数である。

5．$a_1=3$，$(n+1)a_{n+1}=a_n{}^2-1$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

解答　$a_n=n+2$，証明略

$(n+1)a_{n+1}=a_n{}^2-1$ から　　$a_{n+1}=\dfrac{a_n{}^2-1}{n+1}$

よって　　$a_1=3$，$a_2=\dfrac{3^2-1}{1+1}=4$，$a_3=\dfrac{4^2-1}{2+1}=5$，$a_4=\dfrac{5^2-1}{3+1}=6$

したがって，$a_n=n+2$ …… ① と推測できる。

[1]　$n=1$ のとき　　$a_1=1+2=3$

よって，$n=1$ のとき，① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると　　$a_k=k+2$

$n=k+1$ のとき　　$a_{k+1}=\dfrac{a_k{}^2-1}{k+1}=\dfrac{(k+2)^2-1}{k+1}=\dfrac{(k+1)(k+3)}{k+1}$

$=(k+1)+2$

よって，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

6．$a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n{}^2+2na_n-2$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　第 n 項 a_n を推測して，それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

解答　(1)　$a_2=-3$，$a_3=-5$，$a_4=-7$　　(2)　$a_n=-2n+1$，証明略

(1)　$a_2=(-1)^2+2\cdot1\cdot(-1)-2=-3$，$a_3=(-3)^2+2\cdot2\cdot(-3)-2=-5$，

$a_4=(-5)^2+2\cdot3\cdot(-5)-2=-7$

(2)　(1) から，$a_n=-2n+1$　…… ① と推測できる。

[1]　$n=1$ のとき　　$a_1=-2\cdot1+1=-1$

よって，$n=1$ のとき，① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると　　$a_k=-2k+1$

$n=k+1$ のとき　　$a_{k+1}=a_k{}^2+2ka_k-2=(-2k+1)^2+2k(-2k+1)-2$

$=-2k-1=-2(k+1)+1$

よって，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。