数学演習（漸化式）Ｈ２４．１１．１３　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の第 2 項から第 5 項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+5$　　(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n-n$

２. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+6$　　(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=-3a_n$

(3) $a_1=3,\ a_{n+1}-a_n=1$　　(4) $a_1=3,\ 2a_{n+1}=a_n$

３. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=-2n$　　(2) $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+4n$

(3) $a_1=4,\ a_{n+1}-a_n=3n^2$　　(4) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+5^n$

４. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=4,\ a_{n+1}=2a_n-3$　　(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=5a_n-4$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+6$　　(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

5．次の条件によって定まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n-4$

(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=9-2a_n$

(3)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+2$

(4)　$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n+1$

6．次の条件によって定まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$$a_1=2,\quad 3a_{n+1}+a_n=4$$

7．次の条件によって定まる数列$\{a_n\}$の一般項を，[　] で示されたおき換えを利用することによって求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$　　$\left[\dfrac{1}{a_n}=b_n\right]$

(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+4}$　　$\left[\dfrac{1}{a_n}=b_n\right]$

(3)　$a_1=-1$，$na_{n+1}=(n+1)a_n$　　$\left[\dfrac{a_n}{n}=b_n\right]$

数学演習（漸化式）Ｈ２４．１１．１３　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の第２項から第５項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+5$　　　(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n-n$

解答　(1)　$a_2=7,\ a_3=19,\ a_4=43,\ a_5=91$

(2)　$a_2=1,\ a_3=-1,\ a_4=-4,\ a_5=-8$

(1)　$a_2=2a_1+5=2\cdot1+5=7,\quad a_3=2a_2+5=2\cdot7+5=19,$

$a_4=2a_3+5=2\cdot19+5=43,\quad a_5=2a_4+5=2\cdot43+5=91$

(2)　$a_2=a_1-1=2-1=1,\quad a_3=a_2-2=1-2=-1,$

$a_4=a_3-3=-1-3=-4,\quad a_5=a_4-4=-4-4=-8$

2．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+6$　　　(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=-3a_n$

(3)　$a_1=3,\ a_{n+1}-a_n=1$　　　(4)　$a_1=3,\ 2a_{n+1}=a_n$

解答　(1)　$a_n=6n-5$　　(2)　$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$　　(3)　$a_n=n+2$

(4)　$a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(1)　$a_{n+1}=a_n+6$ から,数列 $\{a_n\}$ は初項１，公差６の等差数列である。

したがって，一般項は　$a_n=1+(n-1)\times6$　すなわち　$a_n=6n-5$

(2)　数列 $\{a_n\}$ は初項２，公比 -3 の等比数列である。

したがって，一般項は　$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$

(3)　$a_{n+1}-a_n=1$　より　$a_{n+1}=a_n+1$　から

数列 $\{a_n\}$ は初項３，公差１の等差数列である。

したがって，一般項は　$a_n=3+(n-1)\times1$　すなわち　$a_n=n+2$

(4)　$2a_{n+1}=a_n$ から　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項３，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって，一般項は　$a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=-2n$　　　(2)　$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+4n$

(3)　$a_1=4,\ a_{n+1}-a_n=3n^2$　　　(4)　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+5^n$

解答　(1)　$a_n=-n^2+n+1$　　(2)　$a_n=2n^2-2n+3$

(3)　$a_n=\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+8)$　　(4)　$a_n=\frac{1}{4}(5^n+3)$

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $-2n$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2k)=1-2\sum_{k=1}^{n-1}k=1-2\times\frac{1}{2}(n-1)n$$

よって　$a_n=-n^2+n+1$

初項は $a_1=1$ であるから，上の a_n は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=-n^2+n+1$

(2)　条件より　$a_{n+1}-a_n=4n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $4n$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4k=3+4\sum_{k=1}^{n-1}k=3+4\times\frac{1}{2}(n-1)n=3+2n(n-1)$$

よって　$a_n=2n^2-2n+3$

初項は $a_1=3$ であるから，上の a_n は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n^2-2n+3$

(3)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $3n^2$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3k^2=4+3\sum_{k=1}^{n-1}k^2=4+3\times\frac{1}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\}$$

$$=4+\frac{1}{2}n(n-1)(2n-1)$$

よって　$a_n=\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+8)$

初項は $a_1=4$ であるから，上の a_n は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+8)$

(4)　条件より　$a_{n+1}-a_n=5^n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 5^n であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}5^k=2+\frac{5(5^{n-1}-1)}{5-1}=2+\frac{1}{4}(5^n-5)$$

よって　$a_n=\frac{1}{4}(5^n+3)$

初項は $a_1=2$ であるから，上の a_n は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{1}{4}(5^n+3)$

4．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=4,\ a_{n+1}=2a_n-3$　　　(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=5a_n-4$

(3)　$a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+6$　　　(4)　$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

解答　(1)　$2^{n-1}+3$　　(2)　$5^{n-1}+1$　　(3)　$3\times4^{n-1}-2$　　(4)　$-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

(1)　$a_1=4,\ a_{n+1}=2a_n-3$

$c=2c-3$ を解くと　$c=3$

漸化式を変形すると　$a_{n+1}-3=2(a_n-3)$

$a_n-3=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n,\ b_1=a_1-3=4-3=1$

数列 $\{b_n\}$ は初項１，公比２の等比数列であるから　$b_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$

よって　$a_n=b_n+3=2^{n-1}+3$

(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=5a_n-4$

$c=5c-4$ を解くと　$c=1$

漸化式を変形すると　$a_{n+1}-1=5(a_n-1)$

$a_n-1=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=5b_n,\ b_1=a_1-1=2-1=1$

数列 $\{b_n\}$ は初項１，公比５の等比数列であるから　$b_n=1\times5^{n-1}=5^{n-1}$

よって　$a_n=b_n+1=5^{n-1}+1$

(3)　$a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+6$

$c=4c+6$ を解くと　$c=-2$

漸化式を変形すると　$a_{n+1}+2=4(a_n+2)$

$a_n+2=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=4b_n,\ b_1=a_1+2=1+2=3$

数列 $\{b_n\}$ は初項３，公比４の等比数列であるから　$b_n=3\times4^{n-1}$

よって　$a_n=b_n-2=3\times4^{n-1}-2$

(4)　$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

$c=\frac{1}{3}c+2$ を解くと　$c=3$

漸化式を変形すると　$a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$

$a_n-3=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n,\ b_1=a_1-3=1-3=-2$

数列 $\{b_n\}$ は初項 -2，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから　$b_n=-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって　$a_n=b_n+3=-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

5．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=5,\ a_{n+1}=3a_n-4$　　　(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=9-2a_n$

(3)　$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$　　　(4)　$a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+1$

解答　(1)　$a_n=3^n+2$　　(2)　$a_n=-(-2)^{n-1}+3$　　(3)　$a_n=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

(4)　$a_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$

(1)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}-2=3(a_n-2)$

$a_n-2=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比３の等比数列で，初項は

$b_1=a_1-2=5-2=3$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+2$ より　$a_n=3^n+2$

(2)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}-3=-2(a_n-3)$

$a_n-3=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=-2b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 -2 の等比数列で，初項は

$b_1=a_1-3=2-3=-1$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=-1\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+3$ より　$a_n=-(-2)^{n-1}+3$

(3)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$

$a_n-3=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列で，初項は

$b_1=a_1-3=1-3=-2$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+3$ より　$a_n=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

(4)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}+\dfrac{1}{3}=4\left(a_n+\dfrac{1}{3}\right)$

$a_n+\dfrac{1}{3}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=4b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 4 の等比数列で，初項は

$$b_1=a_1+\frac{1}{3}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=\dfrac{4}{3}\cdot 4^{n-1}=\dfrac{1}{3}\cdot 4^n$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n-\dfrac{1}{3}$ より　$a_n=\dfrac{1}{3}(4^n-1)$

6. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=2,\quad 3a_{n+1}+a_n=4$$

解答　$a_n=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+1$

$3a_{n+1}+a_n=4$ から　$a_{n+1}=-\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{4}{3}$

これを変形すると　$a_{n+1}-1=-\dfrac{1}{3}(a_n-1)$

$a_n-1=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=-\dfrac{1}{3}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列で，初項は

$$b_1=a_1-1=2-1=1$$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=1\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

したがって　$a_n=b_n+1=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+1$

7. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を，[　] で示されたおき換えを利用することによって求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$　$\left[\dfrac{1}{a_n}=b_n\right]$

(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+4}$　$\left[\dfrac{1}{a_n}=b_n\right]$

(3)　$a_1=-1$，$na_{n+1}=(n+1)a_n$　$\left[\dfrac{a_n}{n}=b_n\right]$

解答　(1)　$a_n=\dfrac{1}{2n-1}$　(2)　$a_n=\dfrac{1}{2\cdot 4^{n-1}-1}$　(3)　$a_n=-n$

(1)　$a_1=1>0$ より，漸化式の形からすべての自然数 n について $a_n>0$ である。

漸化式の両辺の逆数をとる（つまり，分子分母をひっくり返す）と

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2a_n+1}{a_n}$　よって　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2a_n}{a_n}+\dfrac{1}{a_n}$　となる。

$\dfrac{2a_n}{a_n}$は約分されるので　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=2+\dfrac{1}{a_n}$　となる。

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$\dfrac{1}{a_{n+1}}$ は b_{n+1}となるので　$b_{n+1}=b_n+2$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公差 2 の等差数列で，初項b_1は　$\dfrac{1}{a_n}=b_n$　であったから

$b_1=\dfrac{1}{a_1}$　なので　$a_1=1$　より　$b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{1}=1$

ゆえに　$b_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$

したがって　$\dfrac{1}{a_n}=b_n$であったから,$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{b_n}{1}$と考えて，

この式の両辺の逆数をとると　$\dfrac{a_n}{1}=\dfrac{1}{b_n}$　つまり　$a_n=\dfrac{1}{b_n}$　となり

$b_n=2n-1$　であったから　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{2n-1}$

(2)　$a_1=1>0$ より，漸化式の形からすべての自然数 n について $a_n>0$ である。

漸化式の両辺の逆数をとる（分子分母をひっくり返す）と　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3a_n+4}{a_n}$

よって　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3a_n}{a_n}+\dfrac{4}{a_n}$　より　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=3+4\times\dfrac{1}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと，$\dfrac{1}{a_{n+1}}$ は b_{n+1}となるので　$b_{n+1}=3+4b_n$

変形すると　$b_{n+1}+1=4(b_n+1)$

よって，$c_n=b_n+1$　とおくと　$b_{n+1}+1$　は　c_{n+1}　となるので　$c_{n+1}=4c_n$

数列 $\{c_n\}$ は公比 4 の等比数列で，$c_1=b_1+1$である。

$b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{1}$　より　$c_1=b_1+1=\dfrac{1}{a_1}+1=\dfrac{1}{1}+1=2$

ゆえに　$c_n=2\cdot 4^{n-1}$　から　$b_n+1=2\cdot 4^{n-1}$　よって　$b_n=2\cdot 4^{n-1}-1$

したがって　$\dfrac{1}{a_n}=b_n$であったから,$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{b_n}{1}$と考えて，この式の両辺の逆数をとると

$\dfrac{a_n}{1}=\dfrac{1}{b_n}$　つまり　$a_n=\dfrac{1}{b_n}$　となり，$b_n=2\cdot 4^{n-1}-1$　であったから

$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{2\cdot 4^{n-1}-1}$

(3)　漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると　$\dfrac{na_{n+1}}{n(n+1)}=\dfrac{(n+1)a_n}{n(n+1)}$　より　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$

$\dfrac{a_n}{n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n$

これは数列$\{b_n\}$が公比1の等比数列であることを意味するので

$b_n=b_1\times 1^{n-1}$　つまり　$b_n=b_1$　ここで　$b_n=\dfrac{a_n}{n}$　なので　$b_1=\dfrac{a_1}{1}=\dfrac{-1}{1}=-1$

ゆえに　$b_n=-1$　したがって　$b_n=b_1$であったから$b_n=-1$

（つまり，数列$\{b_n\}$はすべての項が-1である数列）

また,$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ であったから，この式の両辺にnをかけると$nb_n=a_n$

よって,$b_n=-1$であったから　$a_n=nb_n=-n$