数学演習（漸化式）Ｈ２３．１１．２８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

１．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+6$　　(2) $a_1=2$，$a_{n+1}=-3a_n$

(3) $a_1=3$，$a_{n+1}-a_n=1$　　(4) $a_1=3$，$2a_{n+1}=a_n$

２．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n+4n-1$　　(2) $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+n^2$

(3) $a_1=4$，$a_{n+1}=a_n+5^n$

３．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=10$，$a_{n+1}=a_n-8$　　(2) $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(3) $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+2n+2n^2$

4．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n-3$

(2) $a_1=1,\ 2a_{n+1}-a_n+2=0$

5．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=5,\ a_{n+1}=3a_n-4$

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=9-2a_n$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+1$

6．$a_1=-1,\ a_{n+1}=-3a_n+8$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ について

(1) 一般項 a_n を n の式で表せ。

(2) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

１．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+6$　　(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=-3a_n$

(3)　$a_1=3,\ a_{n+1}-a_n=1$　　(4)　$a_1=3,\ 2a_{n+1}=a_n$

解答　(1)　$a_n=6n-5$　(2)　$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$　(3)　$a_n=n+2$

(4)　$a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

解説

(1)　$a_{n+1}=a_n+6$ から　$a_{n+1}-a_n=6$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 6 の等差数列である。

したがって，一般項は　$a_n=1+(n-1)\times 6$　すなわち　$a_n=6n-5$

(2)　数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公比 -3 の等比数列である。

したがって，一般項は　$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$

(3)　数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公差 1 の等差数列である。

したがって，一般項は　$a_n=3+(n-1)\times 1$　すなわち　$a_n=n+2$

(4)　$2a_{n+1}=a_n$ から　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって，一般項は　$a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

２．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=-1,\ a_{n+1}=a_n+4n-1$　　(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+n^2$

(3)　$a_1=4,\ a_{n+1}=a_n+5^n$

解答　(1)　$a_n=2n^2-3n$　(2)　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$　(3)　$a_n=\frac{5^n+11}{4}$

解説

(1)　$a_{n+1}=a_n+4n-1$ から　$a_{n+1}-a_n=4n-1$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $4n-1$ である。

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-1)=-1+4\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$$

$$=-1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)=2n^2-3n$$

この式に $n=1$ を代入すると，$a_1=2\cdot 1^2-3\cdot 1=-1$ となるから，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n^2-3n$

(2)　$a_{n+1}=a_n+n^2$ から　$a_{n+1}-a_n=n^2$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は n^2 である。

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2=1+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

$$=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$$

この式に $n=1$ を代入すると，$a_1=\frac{1}{6}(2-3+1+6)=1$ となるから，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2-5n+6)$

(3)　$a_{n+1}=a_n+5^n$ から　$a_{n+1}-a_n=5^n$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は 5^n である。

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}5^k=4+\frac{5(5^{n-1}-1)}{5-1}$$

$$=\frac{16+5\cdot 5^{n-1}-5}{4}=\frac{5^n+11}{4}$$

この式に $n=1$ を代入すると，$a_1=\frac{5^1+11}{4}=4$ となるから，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{5^n+11}{4}$

３．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=10,\ a_{n+1}=a_n-8$　　(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(3)　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+2n+2n^2$

解答　(1)　$a_n=-8n+18$　(2)　$a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　(3)　$a_n=\frac{2}{3}(n^3-n+3)$

解説

(1)　数列 $\{a_n\}$ は，初項 10，公差 -8 の等差数列である。

よって，求める一般項は　$a_n=10+(n-1)\cdot(-8)=-8n+18$

(2)　$a_{n+1}=a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ から　$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1+\dfrac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

この式に $n=1$ を代入すると，$a_1=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}=1$ となるから，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3)　$a_{n+1}=a_n+2n+2n^2$ から　$a_{n+1}-a_n=2n+2n^2$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $2n+2n^2$ である。

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2k^2)=2+2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+2\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=2+2\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=\frac{2}{3}(n^3-n+3)$$

この式に $n=1$ を代入すると，$a_1=\frac{2}{3}(1^3-1+3)=2$ となるから，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{2}{3}(n^3-n+3)$

４．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n-3$　　(2)　$a_1=1,\ 2a_{n+1}-a_n+2=0$

解答　(1)　$a_n=-2^n+3$　(2)　$a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2$

解説

(1)　$a_{n+1}=2a_n-3$ を変形すると

$a_{n+1}-3=2(a_n-3)$

ここで，$a_n-3=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列で，その初項は

$b_1=a_1-3=1-3=-2$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=-2\cdot 2^{n-1}=-2^n$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=b_n+3=-2^n+3$

(2)　$2a_{n+1}-a_n+2=0$　すなわち　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-1$　を変形すると

$a_{n+1}+2=\frac{1}{2}(a_n+2)$

ここで，$a_n+2=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列で，その初項は

$b_1=a_1+2=1+2=3$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=b_n-2=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2$

別解　(1)　$a_{n+1}=2a_n-3$　…… ①

① において，n の代わりに $n+1$ とおくと

$a_{n+2}=2a_{n+1}-3$　…… ②

② − ① から　$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_{n+1}=2b_n$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は

$b_1=a_2-a_1=(2a_1-3)-a_1=a_1-3=1-3=-2$

よって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=(-2)\cdot 2^{n-1}$

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2)\cdot 2^{k-1}$$

$$=1+\frac{(-2)\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}=-2^n+3$$

この式に $n=1$ を代入すると，$a_1=-2^1+3=1$ となるから，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=-2^n+3$

(2)　$2a_{n+1}-a_n+2=0$　…… ①

① において，n の代わりに $n+1$ とおくと

$2a_{n+2}-a_{n+1}+2=0$　…… ②

②−① から　$2(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=0$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$2b_{n+1}-b_n=0$

ゆえに　$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列で，初項は

$$b_1=a_2-a_1=\left(\frac{1}{2}a_1-1\right)-a_1=-\frac{1}{2}a_1-1=-\frac{1}{2}\cdot1-1=-\frac{3}{2}$$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$=1+\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=1-3\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2$$

この式に $n=1$ を代入すると，$a_1=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}-2=1$ となるから，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2$

5．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n-4$　　(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=9-2a_n$

(3)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$　　(4)　$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n+1$

解答　(1)　$a_n=3^n+2$　(2)　$a_n=-(-2)^{n-1}+3$　(3)　$a_n=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

(4)　$a_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$

解説

(1)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}-2=3(a_n-2)$

$a_n-2=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は

$$b_1=a_1-2=5-2=3$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+2$ より　$a_n=3^n+2$

(2)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}-3=-2(a_n-3)$

$a_n-3=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=-2b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 -2 の等比数列で，初項は

$$b_1=a_1-3=2-3=-1$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=-1\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+3$ より　$a_n=-(-2)^{n-1}+3$

(3)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$

$a_n-3=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列で，初項は

$$b_1=a_1-3=1-3=-2$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+3$ より　$a_n=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

(4)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}+\frac{1}{3}=4\left(a_n+\frac{1}{3}\right)$

$a_n+\frac{1}{3}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=4b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 4 の等比数列で，初項は

$$b_1=a_1+\frac{1}{3}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=\frac{4}{3}\cdot4^{n-1}=\frac{1}{3}\cdot4^n$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n-\frac{1}{3}$ より　$a_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$

6．$a_1=-1$，$a_{n+1}=-3a_n+8$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　一般項 a_n を n の式で表せ。　(2)　$\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ。

解答　(1)　$a_n=2+(-3)^n$　(2)　$\frac{8n-3-(-3)^{n+1}}{4}$

解説

(1)　$a_{n+1}=-3a_n+8$ を変形すると　$a_{n+1}-2=-3(a_n-2)$

ここで，$a_n-2=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=-3b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 -3 の等比数列で，その初項は

$b_1=a_1-2=-1-2=-3$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=-3\cdot(-3)^{n-1}=(-3)^n$

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=2+b_n=2+(-3)^n$

(2)　$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{2+(-3)^k\}=\sum_{k=1}^{n}2+\sum_{k=1}^{n}(-3)\cdot(-3)^{k-1}$

$$=2n+\frac{(-3)\cdot\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}$$

$$=\frac{8n-3-(-3)^{n+1}}{4}$$