数学演習（漸化式）Ｈ２５．２．２１　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

**１**. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の第 2 項から第 5 項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+5$　　(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n-n$

**２**. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+6$　　(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=-3a_n$

(3)　$a_1=3$，$a_{n+1}-a_n=1$　　(4)　$a_1=3$，$2a_{n+1}=a_n$

**３**. 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=-2n$　　(2)　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+4n$

(3)　$a_1=4$，$a_{n+1}-a_n=3n^2$　　(4)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+5^n$

**4**．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=4,\ a_{n+1}=2a_n-3$

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=5a_n-4$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+6$

(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+2$

**5**．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=2,\quad 3a_{n+1}+a_n=4$$

**1**．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の第 2 項から第 5 項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+5$　　　(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n-n$

解答　(1)　$a_2=7,\ a_3=19,\ a_4=43,\ a_5=91$

(2)　$a_2=1,\ a_3=-1,\ a_4=-4,\ a_5=-8$

(1)　$a_2=2a_1+5=2\cdot1+5=7,\quad a_3=2a_2+5=2\cdot7+5=19,$

$a_4=2a_3+5=2\cdot19+5=43,\quad a_5=2a_4+5=2\cdot43+5=91$

(2)　$a_2=a_1-1=2-1=1,\quad a_3=a_2-2=1-2=-1,$

$a_4=a_3-3=-1-3=-4,\quad a_5=a_4-4=-4-4=-8$

**2**．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+6$　　　(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=-3a_n$

(3)　$a_1=3,\ a_{n+1}-a_n=1$　　　(4)　$a_1=3,\ 2a_{n+1}=a_n$

解答　(1)　$a_n=6n-5$　　(2)　$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$　　(3)　$a_n=n+2$

(4)　$a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(1)　$a_{n+1}=a_n+6$ から,数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 6 の等差数列である。

したがって，一般項は　$a_n=1+(n-1)\times6$　　すなわち　$a_n=6n-5$

(2)　数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公比 $-3$ の等比数列である。

したがって，一般項は　$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$

(3)　$a_{n+1}-a_n=1$　より　$a_{n+1}=a_n+1$　から

数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公差 1 の等差数列である。

したがって，一般項は　$a_n=3+(n-1)\times1$　　すなわち　$a_n=n+2$

(4)　$2a_{n+1}=a_n$ から　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって，一般項は　$a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

**3**．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=-2n$　　　(2)　$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+4n$

(3)　$a_1=4,\ a_{n+1}-a_n=3n^2$　　　(4)　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+5^n$

解答　(1)　$a_n=-n^2+n+1$　　(2)　$a_n=2n^2-2n+3$

(3)　$a_n=\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+8)$　　(4)　$a_n=\frac{1}{4}(5^n+3)$

(1)　$a_{n+1}-a_n=-2n$　より　$a_{n+1}=a_n+(-2n)$　なので

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 $n$ 項が $-2n$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2k)=1-2\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=1-2\times\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}=1-(n-1)n$$

よって　$a_n=-n^2+n+1$

初項は $a_1=1$ であるから，上の $a_n$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=-n^2+n+1$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 $n$ 項が $4n$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4k=3+4\sum_{k=1}^{n-1}k=3+4\times\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$$

$$=3+2n(n-1)$$

よって　$a_n=2n^2-2n+3$

初項は $a_1=3$ であるから，上の $a_n$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n^2-2n+3$

(3)　$a_{n+1}-a_n=3n^2$　より　$a_{n+1}=a_n+3n^2$　なので

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 $n$ 項が $3n^2$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3k^2=4+3\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$

$$=4+3\times\frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}$$

$$=4+\frac{1}{2}n(n-1)(2n-1)$$

よって　$a_n=\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+8)$

初項は $a_1=4$ であるから，上の $a_n$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+8)$

(4)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 $n$ 項が $5^n$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}5^k=2+\frac{5(5^{n-1}-1)}{5-1}$$

$$=2+\frac{1}{4}(5^n-5)=\frac{8+5^n-5}{4}$$

よって　$a_n=\frac{1}{4}(5^n+3)$

初項は $a_1=2$ であるから，上の $a_n$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{1}{4}(5^n+3)$

**4**．次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=4,\ a_{n+1}=2a_n-3$　　　(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=5a_n-4$

(3)　$a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+6$　　　(4)　$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

解答　(1)　$2^{n-1}+3$　　(2)　$5^{n-1}+1$　　(3)　$3\times4^{n-1}-2$　　(4)　$-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

(1)　$a_1=4,\ a_{n+1}=2a_n-3$

$c=2c-3$ を解くと　$c=3$

漸化式を変形すると

$$\begin{array}{rll} & a_{n+1} & =2a_n \quad -3 \\ -) & c & =2c \quad -3 \\ \hline & a_{n+1}-c & =2(a_n-c) \quad \cdots\cdots① \end{array}$$

ここで，$c=3$であったから，①に代入すると

$a_{n+1}-3=2(a_n-3)$　……②

また，括弧の中身を$a_n-3=b_n$　……③ とおく

③の$n$を$n+1$にかえると$a_{n+1}-3=b_{n+1}$　となるので，②式は

$b_{n+1}=2b_n$　……④

となる。さらに，③に$n=1$を代入し，$a_1=4$であるから

$b_1=a_1-3=4-3=1$　……⑤

となる。以上より④，⑤より数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列であるから

$b_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$

よって③を代入すると　$a_n-3=2^{n-1}$　より　$a_n=2^{n-1}+3$

(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=5a_n-4$

$c=5c-4$ を解くと　$c=1$

漸化式を変形すると

$$\begin{array}{rll} & a_{n+1} & =5a_n \quad -4 \\ -) & c & =5c \quad -4 \\ \hline & a_{n+1}-c & =5(a_n-c) \quad \cdots\cdots① \end{array}$$

ここで，$c=1$であったから，①に代入すると

$a_{n+1}-1=5(a_n-1)$　……②

また，括弧の中身を$a_n-1=b_n$　……③ とおく

③の$n$を$n+1$にかえると$a_{n+1}-1=b_{n+1}$　となるので，②式は

$b_{n+1}=5b_n$　……④

となる。さらに，③に$n=1$を代入し，$a_1=2$であるから

$b_1=a_1-1=2-1=1$　……⑤

となる。以上より④，⑤より数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 5 の等比数列であるから

$b_n=1\times5^{n-1}=5^{n-1}$

よって③を代入すると　$a_n-1=5^{n-1}$　より　$a_n=5^{n-1}+1$

(3)　$a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+6$

$c=4c+6$ を解くと　$c=-2$

漸化式を変形すると

$$\begin{array}{rll} & a_{n+1} & =4a_n \quad +6 \\ -) & c & =4c \quad +6 \\ \hline & a_{n+1}-c & =4(a_n-c) \quad \cdots\cdots① \end{array}$$

ここで，$c=-2$であったから，①に代入すると

$a_{n+1}+2=4(a_n+2)$　……②

また，括弧の中身を$a_n+2=b_n$　……③ とおく

③の$n$を$n+1$にかえると$a_{n+1}+2=b_{n+1}$　となるので，②式は

$b_{n+1}=4b_n$　……④

となる。さらに，③に$n=1$を代入し，$a_1=1$であるから

$b_1=a_1+2=1+2=3$　……⑤

となる。以上より④，⑤より数列 $\{b_n\}$ は初項 3，公比 4 の等比数列であるから

$b_n=3\times4^{n-1}$

よって③を代入すると　$a_n+2=3\times4^{n-1}$　より　$a_n=3\times4^{n-1}-2$

(4)　$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

$c=\frac{1}{3}c+2$ を解くと　$c=3$

漸化式を変形すると

$$
\begin{array}{rll}
a_{n+1} &= \dfrac{1}{3}a_n & +2 \\
-)\quad c &= \dfrac{1}{3}c & +2 \\
\hline
a_{n+1}-c &= \dfrac{1}{3}(a_n-c) & \cdots\cdots ①
\end{array}
$$

ここで，$c=3$であったから，①に代入すると

$a_{n+1}-3=\dfrac{1}{3}(a_n-3)$ ……②

また，括弧の中身を$a_n-3=b_n$ ……③ とおく

③の$n$を$n+1$にかえると$a_{n+1}-3=b_{n+1}$ となるので，②式は

$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$ ……④

となる。さらに，③に$n=1$を代入し，$a_1=1$であるから

$b_1=a_1-3=1-3=-2$ ……⑤

となる。以上より④，⑤より数列$\{b_n\}$は初項$-2$，公比$\dfrac{1}{3}$の等比数列であるから

$b_n=-2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって③を代入すると $a_n-3=-2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ より $a_n=-2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

5．次の条件によって定まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$a_1=2,\quad 3a_{n+1}+a_n=4$

解答 $a_n=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+1$

$3a_{n+1}+a_n=4$ から $3a_{n+1}=-a_n+4$ より $a_{n+1}=-\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{4}{3}$

$c=-\dfrac{1}{3}c+\dfrac{4}{3}$ を解くと $c=1$

漸化式を変形すると

$$
\begin{array}{rll}
a_{n+1} &= -\dfrac{1}{3}a_n & +\dfrac{4}{3} \\
-)\quad c &= -\dfrac{1}{3}c & +\dfrac{4}{3} \\
\hline
a_{n+1}-c &= -\dfrac{1}{3}(a_n-c) & \cdots\cdots ①
\end{array}
$$

ここで，$c=1$であったから，①に代入すると

$a_{n+1}-1=-\dfrac{1}{3}(a_n-1)$ ……②

また，括弧の中身を$a_n-1=b_n$ ……③ とおく

③の$n$を$n+1$にかえると$a_{n+1}-1=b_{n+1}$ となるので，②式は

$b_{n+1}=-\dfrac{1}{3}b_n$ ……④

となる。さらに，③に$n=1$を代入し，$a_1=2$であるから

$b_1=a_1-1=2-1=1$ ……⑤

となる。以上より④，⑤より数列$\{b_n\}$は初項1，公比$-\dfrac{1}{3}$の等比数列であるから

$b_n=1\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって③を代入すると $a_n-1=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ より $a_n=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+1$