数学演習（漸化式と数学的帰納法）Ｈ３０．３．２２　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の 第 2 項から第 5 項を求めよ。

$a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n+2n$

$\boxed{2}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=0$，$a_{n+1}=a_n+5$　　(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=-3a_n$

$\boxed{3}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=4^n$　　(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3n-1$

$\boxed{4}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n-2$　　(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3}+2$

$\boxed{5}$ 数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。　$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\dfrac{1}{2}n(3n-1)$

$\boxed{6}$ n を3以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$3^n > 5n+1$$

$\boxed{7}$ すべての自然数 n について，$2n^3+3n^2+n$ は6の倍数である。このことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

$\boxed{8}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=-1,\ a_{n+1}=a_n{}^2+2na_n-2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2) 第 n 項を推測して，それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

数学演習（漸化式と数学的帰納法）Ｈ３０．３．２２　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の 第 2 項から第 5 項を求めよ。

$a_1=-1,\ a_{n+1}=a_n+2n$

解答　$a_2=1,\ a_3=5,\ a_4=11,\ a_5=19$

$a_2=a_1+2\cdot1=-1+2=1$

$a_3=a_2+2\cdot2=1+4=5$

$a_4=a_3+2\cdot3=5+6=11$

$a_5=a_4+2\cdot4=11+8=19$

$\boxed{2}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=0,\ a_{n+1}=a_n+5$　　(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=-3a_n$

解答　(1)　$a_n=5n-5$　　(2)　$a_n=2(-3)^{n-1}$

(1)　初項 0，公差 5 の等差数列であるから

$a_n=0+(n-1)\cdot5=5n-5$

(2)　初項 2，公比 -3 の等比数列であるから

$a_n=2(-3)^{n-1}$

$\boxed{3}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=4^n$　　(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3n-1$

解答　(1)　$a_n=\dfrac{4^n-1}{3}$　　(2)　$a_n=\dfrac{1}{2}(3n^2-5n+4)$

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が 4^n であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=1+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}$$

よって　$a_n=\dfrac{4^n-1}{3}$

初項は $a_1=1$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\dfrac{4^n-1}{3}$

(2)　条件より　$a_{n+1}-a_n=3n-1$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $3n-1$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-1)=1+3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$$

よって　$a_n=\dfrac{1}{2}(3n^2-5n+4)$

初項は $a_1=1$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\dfrac{1}{2}(3n^2-5n+4)$

$\boxed{4}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-2$　　(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3}+2$

解答　(1)　$a_n=3^{n-1}+1$　　(2)　$a_n=-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

(1)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

$b_n=a_n-1$ とすると　$b_{n+1}=3b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は　$b_1=a_1-1=2-1=1$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=1\cdot3^{n-1}=3^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+1$ より　$a_n=3^{n-1}+1$

(2)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}-3=\dfrac{1}{3}(a_n-3)$

$b_n=a_n-3$ とすると　$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列で，初項は　$b_1=a_1-3=1-3=-2$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=b_n+3$ より　$a_n=-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

$\boxed{5}$ 数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。　$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\dfrac{1}{2}n(3n-1)$

証明すべき等式を (A) とする。

[1]　$n=1$ のとき

左辺$=1$,

右辺$=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot(3\cdot1-1)=1$

よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3k-2)=\frac{1}{2}k(3k-1)$$

が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときの (A) の左辺は

$$\begin{aligned}&1+4+7+\cdots\cdots+(3k-2)+\{3(k+1)-2\}\\&=\frac{1}{2}k(3k-1)+(3k+1)\\&=\frac{1}{2}\{k(3k-1)+2(3k+1)\}\\&=\frac{1}{2}(3k^2+5k+2)=\frac{1}{2}(k+1)(3k+2)\end{aligned}$$

$n=k+1$ のときの (A) の右辺は

$$\frac{1}{2}(k+1)\{3(k+1)-1\}=\frac{1}{2}(k+1)(3k+2)$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ。

6 n を3以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$3^n > 5n+1$$

解答　略

この不等式を(A)とする。

[1]　$n=3$ のとき

左辺$=3^3=27$，右辺$=5\cdot3+1=16$

よって，$n=3$ のとき，(A)が成り立つ。

[2]　$k \geqq 3$ として，$n=k$ のとき(A)が成り立つ，すなわち

$$3^k > 5k+1$$

が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のときの(A)の両辺の差を考えると

$$3^{k+1}-\{5(k+1)+1\}=3\cdot3^k-(5k+6)>3(5k+1)-(5k+6)=10k-3>0$$

すなわち　$3^{k+1}>5(k+1)+1$

よって，$n=k+1$ のときも(A)が成り立つ。

[1]，[2]から，3以上のすべての自然数 n について(A)が成り立つ。

7 すべての自然数 n について，$2n^3+3n^2+n$ は6の倍数である。このことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

解答　略

「$2n^3+3n^2+n$ は6の倍数である」を(A)とする。

[1]　$n=1$ のとき

$$2\cdot1^3+3\cdot1^2+1=6$$

よって，$n=1$ のとき，(A)が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき(A)が成り立つ，すなわち，ある整数 m を用いて

$$2k^3+3k^2+k=6m$$

と表されると仮定する。

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}2(k+1)^3+3(k+1)^2+(k+1)&=(2k^3+3k^2+k)+6k^2+12k+6\\&=6m+6k^2+12k+6\\&=6(m+k^2+2k+1)\end{aligned}$$

ここで，$m+k^2+2k+1$ は整数である。

よって，$2(k+1)^3+3(k+1)^2+(k+1)$ は6の倍数であるから，$n=k+1$ のときも(A)が成り立つ。

[1]，[2]から，すべての自然数 n について(A)が成り立つ。

8 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=-1,\ a_{n+1}=a_n{}^2+2na_n-2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　第 n 項を推測して，それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

解答　(1)　$a_2=-3$，$a_3=-5$，$a_4=-7$　　(2)　略

(1)　$a_2=a_1{}^2+2\cdot1\cdot a_1-2$

$=(-1)^2+2\cdot1\cdot(-1)-2=-3$

$a_3=a_2{}^2+2\cdot2\cdot a_2-2$

$=(-3)^2+2\cdot2\cdot(-3)-2=-5$

$a_4=a_3{}^2+2\cdot3\cdot a_3-2$

$=(-5)^2+2\cdot3\cdot(-5)-2=-7$

(2)　(1)から，$a_n=-2n+1$ であると推測される。

$a_n=-2n+1$ を(A)とする。

[1]　$n=1$ のとき

左辺$=a_1=-1$，

右辺$=-2\cdot1+1=-1$

よって，$n=1$ のとき(A)が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき(A)が成り立つ，すなわち

$a_k=-2k+1$　……①

が成り立つと仮定する。

$a_{k+1}=a_k{}^2+2ka_k-2$ であるから，①より

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=(-2k+1)^2+2k(-2k+1)-2\\&=(4k^2-4k+1)-4k^2+2k-2\\&=-2k-1=-2(k+1)+1\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも(A)が成り立つ。

[1]，[2]から，すべての自然数 n について(A)が成り立つ。