数学演習（数列）　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．第５項が１０８，第２０項が－２３７である等差数列がある。
⑴ この数列の初項と公差を求めよ。
⑵ この数列の初項から第何項までの和が最大となるか。

２．初項が２，公比が３の等比数列の，初項から少なくとも第何項までの和をとると１０００００より大きくなるか。ただし，$\log_{10}3=0.4771$とする。

３．初項から第１０項までの和が２，初項から第２０項までの和が３である等比数列がある。この等比数列について，初項から第３０項までの和をとるといくつになるか。

４．等比数列をなす３つの数$1,r,r^2$の順序を入れ替えたら等差数列になった。このときrの値を求めよ。ただし$r<0$とする。

５．数列$\{a_n\}$について，初項から第n項までの和をS_nとする。$S_n=n^2+2n+3$であるとき，この数列の一般項を求めよ。

６．次の数列の初項から第n項までの和をnを用いて表せ。
⑴ $1,3,7,15,31,63,\cdots$

⑵ $1,\dfrac{1}{1+2},\dfrac{1}{1+2+3},\dfrac{1}{1+2+3+4},\cdots$

⑶ $2\cdot3^2,4\cdot4^2,6\cdot5^2,8\cdot6^2,10\cdot7^2,\cdots$

⑷ $1,2\cdot3,3\cdot3^2,4\cdot3^3,5\cdot3^4,\cdots$

数学演習（数列）　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　こたえ　）

1．第５項が１０８，第２０項がー２３７である等差数列がある。
(1) この数列の初項と公差を求めよ。
(2) この数列の初項から第何項までの和が最大となるか。

(1) $a_n = a+(n-1)d$

$a_5 = a+4d = 108$

$a_{20} = a+19d = -237$

∴ $a=200,\ d=-23$ //

(10)

(2) $a_n = 200+(n-1)(-23)$

$= -23n+223$

$a_n<0$ となるのは

$-23n+223<0$

∴ $n>9.\cdots$

よって第10項から $a_n<0$

ゆえに

初項から第9項までの和が最大

(10)

2．初項が２，公比が３の等比数列の，初項から少なくとも第何項までの和をとると１０００００より大きくなるか。ただし，$\log_{10}3=0.4771$とする。

初項から第n項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{2(3^n-1)}{3-1}=3^n-1$$

∴ $3^n-1>100000$ より $3^n>100001$ を満たす最小のnを求める。ここで、$3^n>100000$ なるnの範囲を求めると

$\log_{10}3^n>\log_{10}100000$

∴ $n\log_{10}3>5$

より $n>\frac{5}{\log_{10}3}=\frac{5}{0.4771}=10.47\cdots$

$3^{10}=59049$

$3^{11}=177147$ より

初項から第11項 //

(10)

3．初項から第１０項までの和が２，初項から第２０項までの和が３である等比数列がある。この等比数列について，初項から第３０項までの和をとるといくつになるか。

• $r=1$ の時 $10a=2,\ 20a=3$ を満たす a はない

• $r\neq1$ の時

$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=2$ …①

$S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=3$ …②

②より

$\frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=3$

①代入して

$2\cdot(r^{10}+1)=3$ より $r^{10}=\frac{1}{2}$

ここで

$S_{30}=\frac{a(r^{30}-1)}{r-1}$

$=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}(r^{20}+r^{10}+1)$

$=2\{(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}+1\}$

$=\frac{7}{2}$ //

(10)

4．等比数列をなす３つの数$1, r, r^2$の順序を入れ替えたら等差数列になった。このときrの値を求めよ。ただし$r<0$とする。

$r<0$ であり また $r^2>0$ であるので 小さい順に並べると

(i) $1<r^2$（$r<0$ より $r<-1$ の時） $r,\ 1,\ r^2$

(ii) $1>r^2$（$r<0$ より $-1<r<0$ の時） $r,\ r^2,\ 1$ の2通り

(i)の時 等差中項より

$2\cdot1=r+r^2$

∴ $r^2+r-2=0$

$(r+2)(r-1)=0$

∴ $r=-2,\ 1$

$r<-1$ より $r=-2$

(ii)の時 等差中項より

$2r^2=r+1$

∴ $2r^2-r-1=0$

$(2r+1)(r-1)=0$

∴ $r=-\frac{1}{2},\ 1$

$-1<r<0$ より $r=-\frac{1}{2}$

以上より

$r=-2,\ -\frac{1}{2}$ //

(10)

5．数列$\{a_n\}$について，初項から第n項までの和をS_nとする。$S_n=n^2+2n+3$であるとき，この数列の一般項を求めよ。

$n=1$ の時 $a_1=S_1=1^2+2\cdot1+3=6$

$n\geqq2$ の時 $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+2n+3)-\{(n-1)^2+2(n-1)+3\}$

$=n^2+2n+3-(n^2-2n+1+2n-2+3)$

$=n^2+2n+3-(n^2+2)$

$=2n+1$ …(*)

この時 (*)の右辺に $n=1$ を代入してみると

$2\cdot1+1=3$

となり、これは a_1 と一致しない

∴ $a_n=\begin{cases}6 & (n=1)\\ 2n+1 & (n\geqq2)\end{cases}$ //

(10)

6．次の数列の初項から第n項までの和をnを用いて表せ。

(1) $1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ \cdots$

$2\quad 4\quad 8\quad 16\quad 32$

階差数列を $\{b_n\}$ とおくと $\{b_n\}$ は初項2, 公比2の等比数列 ∴ $b_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$

よって $n\geqq2$ の時

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$

$=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$ …(*)

(*)式の右辺に $n=1$ を代入すると $2-1=1$ となり

これは a_1 に一致する

よって $a_n=2^n-1$

よって

$S=\sum_{k=1}^{n}a_k$

$=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)$

$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n$

$=2^{n+1}-n-2$ //

(10)

(2) $1,\ \frac{1}{1+2},\ \frac{1}{1+2+3},\ \frac{1}{1+2+3+4},\ \cdots$

一般項 $\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$

$S=(\frac{2}{1}-\frac{2}{2})+(\frac{2}{2}-\frac{2}{3})+(\frac{2}{3}-\frac{2}{4})+\cdots+(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1})$

$=\frac{2}{1}-\frac{2}{n+1}$

$=\frac{2(n+1)-2}{n+1}=\frac{2n}{n+1}$ //

(10)

(3) $2\cdot3^2,\ 4\cdot4^2,\ 6\cdot5^2,\ 8\cdot6^2,\ 10\cdot7^2,\ \cdots$

$S=\sum_{k=1}^{n}2k(k+2)^2$

$=2\sum_{k=1}^{n}(k^3+4k^2+4k)$

$=2\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\}$

$=2\cdot\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)+8(2n+1)+24\}$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(3n^2+3n+16n+8+24)=\frac{1}{6}n(n+1)(3n^2+19n+32)$ //

(10)

(4) $1,\ 2\cdot3,\ 3\cdot3^2,\ 4\cdot3^3,\ 5\cdot3^4,\ \cdots$

$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1}$

$3S=\qquad 1\cdot3+2\cdot3^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot3^{n-1}+n\cdot3^n$

$-2S=1\cdot1+\underbrace{1\cdot3+1\cdot3^2+\cdots\cdots+1\cdot3^{n-1}}_{\text{初3, 比3, 数 } n-1 \text{ の等比}}-n\cdot3^n$

$=1+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}-n\cdot3^n$

$=\frac{2+3^n-3-2n\cdot3^n}{2}=\frac{-1+(1-2n)\cdot3^n}{2}$

∴ $S=\frac{(2n-1)\cdot3^n+1}{4}$ //

(10)