数学演習（数列）　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．４と２５の間にあって，１１を分母とする既約分数の総和を求めよ。

２．等比数列$\{a_n\}$について，

$$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=3\,,\ \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{10}}=2$$

が成り立つとき，$a_1\times a_2\times\cdots\times a_{10}$ の値を求めよ。

３．調和数列$\{a_n\}$について，第２項が２，第５項が１である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+2}$ をnで表せ。

４．$\angle$XPY（$=60°$）の２辺 PX，PY に接する半径１の円を O_1 とする。次に，２辺 PX，PY および円 O_1 に接する円のうち半径の小さい方の円を O_2 とする。以下，同様にして順に円 O_3，O_4，…… を作る。

(1) 円 O_n の半径 r_n を n で表せ。

(2) 円 O_n の面積を S_n とするとき，$S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n$ を n で表せ。

5．数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nが$S_n=3^n-1$で与えられているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 一般項a_nを求めよ。

(2) 和$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1}$をnで表せ。

(3) 和$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_k}$をnで表せ。

6．次の数列の一般項と初項から第n項までの和を求めよ。

$-3,\ 2,\ 19,\ 52,\ 105,\ 182,\ 287,\ \cdots\cdots$

7．数列$\{a_n\}$が以下のように定義されている。

$\{a_n\}:1,2,2,2,3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,4,5,5,\cdots$

このとき，$\sum_{k=1}^{200} a_k$を求めよ。

数学演習（数列）

（　　）組（　　）番　名前（ こたえ 　　　）

1．4と25の間にあって，11を分母とする既約分数の総和を求めよ。

4 と 25 の間にあって，11 を分母とする分数は

$$\frac{45}{11},\ \frac{46}{11},\ \frac{47}{11},\ \cdots\cdots,\ \frac{274}{11} \qquad \cdots\cdots①$$

これは初項が $\frac{45}{11}$，末項が $\frac{274}{11}$，項数が 230 の等差数列であるから，① の和は

$$\frac{1}{2}\cdot 230\left(\frac{45}{11}+\frac{274}{11}\right)=3335$$

① のうち，整数になる数の和は　$5+6+7+\cdots\cdots+24=\frac{1}{2}\cdot 20(5+24)=290$

したがって，求める和は　$3335-290=3045$

10

2．等比数列$\{a_n\}$について，

$$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=3,\ \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{10}}=2$$

が成り立つとき，$a_1\times a_2\times\cdots\times a_{10}$ の値を求めよ。

初項を a，公比を r とおくと 条件より r≠1 である．

$$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=3 \quad \cdots①$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{10}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r}\right)^9$$

$$=\frac{\frac{1}{a}\left(1-\left(\frac{1}{r}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{r}}=2 \quad \cdots②$$

この時．

$$a_1\times a_2\times\cdots\times a_{10}=a\cdot ar\cdot\cdots\cdots ar^9$$

$$=a^{10}r^{1+2+\cdots+9}=a^{10}r^{\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10}$$

$$=a^{10}r^{45}$$

の値を求める．

② より 分子・分母に r^{10} かけると

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{r^{10}}\cdot\frac{r^{10}-1}{1-\frac{1}{r}}=2.$$

$$\therefore\ \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{r^9}\cdot\frac{r^{10}-1}{r-1}=2.$$

① より $\frac{r^{10}-1}{r-1}=\frac{3}{a}$ より 代入して

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{r^9}\cdot\frac{3}{a}=2$$

$$\therefore\ a^2r^9=\frac{3}{2}$$

両辺を5乗して

$$(a^2r^9)^5=\left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$\therefore\ a^{10}r^{45}=\frac{243}{32}$$

以上より $a_1\times a_2\times\cdots\times a_{10}=\frac{243}{32}$

10

3．調和数列$\{a_n\}$について，第2項が2，第5項が1である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $\sum_{k=1}^{n}a_ka_{k+2}$ をnで表せ。

(1) 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ は等差数列となる．初項 a，公差 d として

$$\begin{cases}\frac{1}{a_2}=a+d=\frac{1}{2}\\[4pt] \frac{1}{a_5}=a+4d=1\end{cases} \qquad \therefore\ d=\frac{1}{6},\ a=\frac{1}{3}$$

よって $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3}+(n-1)\frac{1}{6}=\frac{n+1}{6}$

$$\therefore\ a_n=\frac{6}{n+1}$$

6

(2) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k+1}\cdot\frac{6}{k+3}=36\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}$$

ここで $\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$ より

$$36\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}=18\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

ここで．

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

始め2コと最後2コが残る

$$=\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+$$

$$\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$

$$=\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}=\frac{5(n+2)(n+3)-6(n+3)-6(n+2)}{6(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{5n^2+13n}{6(n+2)(n+3)}$$

以上より $$\sum_{k=1}^{n}a_ka_{k+2}=18\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\frac{3n(5n+13)}{(n+2)(n+3)}$$

10

4．∠XPY（＝60°）の2辺PX，PYに接する半径1の円をO_1とする。次に，2辺PX，PYおよび円O_1に接する円のうち半径の小さい方の円をO_2とする。以下，同様にして順に円O_3，O_4，……を作る。

(1) 円O_nの半径r_nをnで表せ。

(2) 円O_nの面積をS_nとするとき，$S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n$をnで表せ。

4．(1) 右の図の $\triangle O_nO_{n+1}H$ について

$$O_nO_{n+1}=r_n+r_{n+1},$$

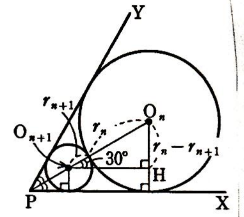
$$O_nH=r_n-r_{n+1}$$

$\angle O_nO_{n+1}H=30°$ であるから

$$O_nO_{n+1}=2O_nH$$

よって　$r_n+r_{n+1}=2(r_n-r_{n+1})$

ゆえに　$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n$　　また　$r_1=1$



よって，数列$\{r_n\}$は初項1，公比$\frac{1}{3}$の等比数列であるから　$r_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

6

(2) $S_n=\pi r_n^2=\pi\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$ であるから

$$S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n=\frac{\pi\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9\pi}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$$

10

5．数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nが$S_n=3^n-1$で与えられているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 一般項a_nを求めよ。

(2) 和$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1}$を$n$で表せ。

(3) 和$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{a_k}$を$n$で表せ。

(1) $\boxed{n \geqq 2 \text{ の時}}$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1)$

$= 3^n - 3^{n-1}$

$= 3 \cdot 3^{n-1} - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$　(＊)

ないと減点

$\boxed{n=1 \text{ の時}}$

$a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2$

これは(＊)式のnに1をだいしたものと一致する

$\therefore$

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

(6)

(2)

$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} 2\cdot 3^{k-1} \times 2 \cdot 3^k$

$= \sum_{k=1}^{n} 4 \cdot 3^{2k-1}$　$\leftarrow$ $\left(3^{2k-1} = 3^{-1}\cdot 3^{2k} = 3^{-1}\cdot (3^2)^k = \dfrac{1}{3}\cdot 9^k\right)$

$= \sum_{k=1}^{n} \dfrac{4}{3} \cdot 9^k$　初 12，比 9 の等比

$= \dfrac{12(9^n - 1)}{9-1}$

$= \dfrac{3}{2}(9^n - 1)$

(6)

(3) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2\cdot 3^{k-1}} = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$ より　$S = \sum_{k=1}^{n} k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$ とおく．

$S = 1\cdot 1 + 2\cdot\dfrac{1}{3} + 3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \cdots + n\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\dfrac{1}{3}S = \quad 1\cdot\dfrac{1}{3} + 2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \cdots + (n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$　(−

$\dfrac{2}{3}S = 1 + \underbrace{\dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}}_{\text{初}\frac{1}{3}\text{，比}\frac{1}{3}\text{，数}n-1} - n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$= 1 + \dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{3}} - n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$= 1 + \dfrac{1}{2}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} - n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$= \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} - \dfrac{n}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$= \dfrac{3}{2} - \dfrac{2n+3}{6}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore S = \dfrac{3}{2}\left\{\dfrac{3}{2} - \dfrac{2n+3}{6}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$ より

$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{a_k} = \dfrac{1}{2}S$

$= \dfrac{3}{4}\left\{\dfrac{3}{2} - \dfrac{2n+3}{6}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} = \dfrac{9}{8} - \dfrac{2n+3}{8}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(10)

6．次の数列の一般項と初項から第n項までの和を求めよ。

$-3,\ 2,\ 19,\ 52,\ 105,\ 182,\ 287,\ \cdots\cdots$

与えられた数列を$\{a_n\}$，その階差数列を$\{b_n\}$とする。
また，$\{b_n\}$の階差数列を$\{c_n\}$とすると

$\{b_n\}$：5, 17, 33, 53, 77, 105, ……

$\{c_n\}$：12, 16, 20, 24, 28, ……

ゆえに，$\{c_n\}$は，初項12，公差4の等差数列であるから，その一般項は

$c_n = 12 + (n-1)\cdot 4 = 4n+8$

よって，$\boxed{n \geqq 2 \text{のとき}}$

$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k+8) = 5 + 4\sum_{k=1}^{n-1}k + 8\sum_{k=1}^{n-1}1$

$= 5 + 4\cdot\dfrac{1}{2}(n-1)n + 8(n-1) = 2n^2+6n-3$

この式に$n=1$を代入すると，$b_1 = 2+6-3=5$となるから

$b_n = 2n^2+6n-3\ (n \geqq 1)$

なければ減点

よって，$\boxed{n \geqq 2 \text{のとき}}$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k^2+6k-3) = -3 + 2\sum_{k=1}^{n-1}k^2 + 6\sum_{k=1}^{n-1}k - 3\sum_{k=1}^{n-1}1$

$= -3 + 2\cdot\dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + 6\cdot\dfrac{1}{2}(n-1)n - 3(n-1)$

$= \dfrac{1}{3}n(2n^2+6n-17)$

なければ減点

初項は-3であるから，この式は$n=1$のときにも成り立つ。

以上により，一般項a_nは　$a_n = \dfrac{1}{3}n(2n^2+6n-17)$

(10)

また，初項から第n項までの和は

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3}k(2k^2+6k-17)$

$= \dfrac{1}{3}\left(2\sum_{k=1}^{n}k^3 + 6\sum_{k=1}^{n}k^2 - 17\sum_{k=1}^{n}k\right)$

$= \dfrac{1}{3}\left\{2\cdot\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 + 6\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 17\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}$

$= \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)\left\{n(n+1) + 2(2n+1) - 17\right\}$

$= \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)(n^2+5n-15)$

$= \dfrac{1}{6}n(n+1)(n^2+5n-15)$

(6)

7．数列$\{a_n\}$が以下のように定義されている。

$\{a_n\}$：1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, …

このとき，$\sum_{k=1}^{200}a_k$を求めよ。

kが第k群に属するとすると，第k群は2k−1個の項で構成される．

第200項が第n群に属するとすると

$\left(\text{n−1群} \mid \text{n群} \mid \text{n+1群} \right)$

$\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)+1$　　200　　$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+1$

$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)+1 \leqq 200 < \sum_{k=1}^{n}(2k-1)+1$

が成り立つ。整理して

$(n-1)^2 + 1 \leqq 200 < n^2+1$　　$\left(\begin{array}{l} n^2 \fallingdotseq 200 \\ n = 10\sqrt{2} \fallingdotseq 14 \end{array}\right)$

n=15とすると．

$14^2+1 = 197$，$15^2+1 = 226$

より，第200項は第15群に属する．

14群 | 15群
15
197番

そして，第15群の初項が第197項より
第200項は第15群の4番目．

ここで，第k群に属する項の和は
kが(2k−1)個あるので，k(2k−1)

$\therefore$

$\sum_{k=1}^{200}a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{14}k(2k-1)}_{\text{14群まで}} + \underbrace{15\times 4}_{\text{15群}}$

$= \sum_{k=1}^{14}(2k^2-k) + 60$

$= 2\cdot\dfrac{1}{6}\cdot 14\cdot 15\cdot(2\cdot 14+1) - \dfrac{1}{2}\cdot 14\cdot 15 + 60$

$= 2030 - 105 + 60$

$= 1985$

(10)