数学演習（等差数列･等比数列･いろいろな数列の和･群数列）Ｈ２３．１２．５　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1．(1)　数列 $\dfrac{1}{1\cdot3}$，$\dfrac{1}{3\cdot5}$，$\dfrac{1}{5\cdot7}$，…… の初項から第n項までの和を求めよ。

(2)　数列 $1\cdot1$，$3\cdot3$，$5\cdot3^2$，…… の初項から第n項までの和を求めよ。

2．次の数列の第 k 項a_kを求めよ。また，初項から第 n 項までの和S_nを求めよ。

(1)　2，2＋4，2＋4＋6，2＋4＋6＋8，……

(2)　1，1＋3，1＋3＋9，1＋3＋9＋27，……

3．次の数列の初項から第 n 項までの和 S を求めよ。

(1)　$2\cdot5$，$3\cdot7$，$4\cdot9$，$5\cdot11$，……

(2)　$(n+1)^2$，$(n+2)^2$，$(n+3)^2$，……

4．和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,3^k$ を求めよ。

5．第 3 項が 70，第 8 項が 55 である等差数列の初項は $^{ア}\boxed{}$ で，公差は $^{イ}\boxed{}$ である。この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$n=$ $^{ウ}\boxed{}$ のとき，S_n は最大となり，このとき，$S_n=$ $^{エ}\boxed{}$ である。

6．調和数列とは各項の逆数をとった数列が等差数列になることである。次の調和数列$\{a_n\}$についてx，y の値と$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$$\{a_n\}:1,\ x,\ \frac{1}{2},\ y,\ \cdots\cdots$$

7．1 から 300 までの自然数について，次のような数の和を求めよ。

(1)　3 または 7 で割り切れる数

(2)　3 でも 7 でも割り切れない数

8．異なる3 つの実数 a，b，c はこの順序で等差数列になり，b，c，a の順序で等比数列となる。a，b，c の積が 125 であるとき，a，b，c の値を求めよ。

9．次の等比数列について，初項から第 3 項までの和が 3，第 4 項から第 6 項までの和が -24 である。このとき初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

10.　$\{1\}$，$\{3,\ 5\}$，$\{7,\ 9,\ 11\}$，$\{13,\ 15,\ 17,\ 19\}$，……

のように奇数の列を，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

(1)　第 n 群の初項を求めよ。

(2)　第 n 群に含まれる数の和を求めよ。

(3)　99 は第何群の第何項か。

数学演習（等差数列･等比数列･いろいろな数列の和･群数列）Ｈ２３．１２．５　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

1．(1)　数列 $\frac{1}{1\cdot3}$，$\frac{1}{3\cdot5}$，$\frac{1}{5\cdot7}$，…… の初項から第n項までの和を求めよ。

(2)　数列 $1\cdot1$，$3\cdot3$，$5\cdot3^2$，…… の初項から第n項までの和を求めよ。

解答　(1)　$\frac{n}{2n+1}$　　(2)　$(n-1)\cdot3^n+1$

解説

(1)　第n項は$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$となる。

第 k 項は　$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$　と表されるから，

求める和を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

(2)　第n項は$(2n-1)\cdot3^{n-1}$となる。

求める和を S とすると

$$S=1\cdot1+3\cdot3+5\cdot3^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$$

$$3S=\quad 1\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot3^{n-1}+(2n-1)\cdot3^n$$

辺々を引くと

$$-2S=1+2\cdot3+2\cdot3^2+\cdots\cdots+2\cdot3^{n-1}-(2n-1)\cdot3^n$$

$$=1+\frac{2\cdot3(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot3^n=-2(n-1)\cdot3^n-2$$

ゆえに　$S=(n-1)\cdot3^n+1$

2．次の数列の第 k 項a_kを求めよ。また，初項から第 n 項までの和S_nを求めよ。

(1)　2，$2+4$，$2+4+6$，$2+4+6+8$，……

(2)　1，$1+3$，$1+3+9$，$1+3+9+27$，……

解答　(1)　$a_k=k(k+1)$，$S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(2)　$a_k=\frac{1}{2}(3^k-1)$，$S_n=\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$

解説

(1)　$a_k=2+4+6+\cdots\cdots+2k=\sum_{n=1}^{k}2n=2\cdot\frac{1}{2}k(k+1)=k(k+1)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(2)　$a_k=1+3+9+\cdots\cdots+3^{k-1}=\frac{3^k-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^k-1)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(3^k-1)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}3^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\right\}$$

$$=\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$$

3．次の数列の初項から第 n 項までの和 S を求めよ。

(1)　$2\cdot5$，$3\cdot7$，$4\cdot9$，$5\cdot11$，……

(2)　$(n+1)^2$，$(n+2)^2$，$(n+3)^2$，……

解答　(1)　$\frac{1}{6}n(4n^2+21n+35)$　(2)　$\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)$

解説

(1)　この数列の第 k 項は　$(k+1)(2k+3)$

よって　$S=\sum_{k=1}^{n}(k+1)(2k+3)=\sum_{k=1}^{n}(2k^2+5k+3)=2\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3$

$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n$$

$$=\frac{1}{6}n\{2(n+1)(2n+1)+15(n+1)+18\}$$

$$=\frac{1}{6}n(4n^2+21n+35)$$

(2)　初項から第n項までの和は　$(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(n+n)^2$

第 k 項は　$(n+k)^2=n^2+2nk+k^2$

和は　$\sum_{k=1}^{n}(n^2+2nk+k^2)=n^2\sum_{k=1}^{n}1+2n\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}k^2$

$$=n^2\cdot n+2n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n\{6n^2+6n(n+1)+(n+1)(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}n(14n^2+9n+1)=\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)$$

4．和 $\sum_{k=1}^{n}k\,3^k$ を求めよ。

解答　$\frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$

解説

$S_n=\sum_{k=1}^{n}k3^k$ とおくと

$$S_n=1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots\cdots+n3^n$$

$$3S_n=\quad 1\cdot3^2+2\cdot3^3+\cdots\cdots+(n-1)\cdot3^n+n3^{n+1}$$

辺々を引くと

$$-2S_n=3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^n-n3^{n+1}$$

$$=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n3^{n+1}=\frac{(1-2n)3^{n+1}-3}{2}$$

よって　$S_n=\frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$　すなわち　$\sum_{k=1}^{n}k\,3^k=\frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$

5．第 3 項が 70，第 8 項が 55 である等差数列の初項は ア $\boxed{}$ で，公差は イ $\boxed{}$ である。この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$n=$ ウ $\boxed{}$ のとき，S_n は最大となり，このとき，$S_n=$ エ $\boxed{}$ である。

解答　(ア)　76　(イ)　-3　(ウ)　26　(エ)　1001

解説

初項を a，公差を d とすると

$a+2d=70$，$a+7d=55$ から　$a=$ア76，$d=$イ-3

よって，一般項 a_n は　$a_n=76+(n-1)(-3)=79-3n$

$a_n\geqq0$ である n の範囲は　$1\leqq n\leqq26$

よって $n=$ウ26 のとき，S_n は最大となり，

その最大値は　$S_{26}=\frac{26\{2\cdot76+(26-1)(-3)\}}{2}=$エ$1001$

6．調和数列とは各項の逆数をとった数列が等差数列になることである。次の調和数列$\{a_n\}$についてx，y の値と$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$\{a_n\}:1,\ x,\ \frac{1}{2},\ y,\ \cdots\cdots$$

解答　$x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{2}{5}$；$a_n=\frac{2}{n+1}$

解説

数列 1，$\frac{1}{x}$，2，$\frac{1}{y}$，…… が等差数列になる。

よって等差中項の関係から　$2\cdot\frac{1}{x}=1+2$，$2\cdot2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

ゆえに　$x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{2}{5}$

したがって，$\{a_n\}$の逆数をとった数列は

1，$\frac{3}{2}$，2，$\frac{5}{2}$，……

より，この等差数列の初項は 1，公差は $\frac{1}{2}$ となる。

よって，この等差数列の一般項は　$1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$

したがって，等差数列の一般項の逆数をとって　$a_n=\frac{2}{n+1}$

7．1 から 300 までの自然数について，次のような数の和を求めよ。

(1)　3 または 7 で割り切れる数

(2)　3 でも 7 でも割り切れない数

解答　(1)　19266　(2)　25884

解説

(1)　3 で割り切れる数の和は，初項 3，末項 300，項数 100の等差数列の和に等しいから

$$\frac{1}{2}\cdot100(3+300)=15150$$

7 で割り切れる数の和は，初項 7，末項 294，項数 42 の等差数列の和に等しいから

$$\frac{1}{2}\cdot42(7+294)=6321$$

3 と 7 の両方で割り切れる数の和は，初項 21，末項 294，項数 14 の等差数列の和に等しいから　$\frac{1}{2}\cdot 14(21+294)=2205$

よって，3 または 7 で割り切れる数の和は

$15150+6321-2205=19266$

(2)　1 から 300 までの自然数の和は　$\frac{1}{2}\cdot 300(1+300)=45150$

(1) から，3 でも 7 でも割り切れない数の和は　$45150-19266=25884$

8．異なる3つの実数 a，b，c はこの順序で等差数列になり，b，c，a の順序で等比数列となる。a，b，c の積が 125 であるとき，a，b，c の値を求めよ。

解答　$a=-10$，$b=-\frac{5}{2}$，$c=5$

解説

数列 a，b，c が等差数列をなすから　$2b=a+c$　…… ①

数列 b，c，a が等比数列をなすから　$c^2=ab$　…… ②

a，b，c の積が 125 であるから　$abc=125$　…… ③

② を ③ に代入して　$c^3=125$　ゆえに　$c=5$

①，② に代入して　$2b=a+5$，$ab=25$

これから b を消去すると　$a(a+5)=50$

整理すると　$a^2+5a-50=0$

左辺を因数分解して　$(a-5)(a+10)=0$　よって　$a=5,\ -10$

$ab=25$ より　$a=5$ のとき　$b=5$，　しかし，a , b , cは異なる数なので不適

$a=-10$ のとき　$b=-\frac{5}{2}$

したがって　$a=-10$，$b=-\frac{5}{2}$，$c=5$

9．次の等比数列について，初項から第 3 項までの和が 3，第 4 項から第 6 項までの和が -24である。このとき初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解答　初項 1，公比 -2

解説

初項を a，公比を r とする。

$a+ar+ar^2=3$　…… ①，　$ar^3+ar^4+ar^5=-24$　…… ②

② から　$(a+ar+ar^2)r^3=-24$

これに ① を代入して　$3r^3=-24$　ゆえに　$r^3=-8$

r は実数であるから　$r=-2$　このとき，① から　$a-2a+4a=3$

ゆえに　$3a=3$　よって　$a=1$

したがって　初項 1，公比 -2

10.　$\{1\}$，$\{3,\ 5\}$，$\{7,\ 9,\ 11\}$，$\{13,\ 15,\ 17,\ 19\}$，……

のように奇数の列を，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

(1)　第 n 群の初項を求めよ。

(2)　第 n 群に含まれる数の和を求めよ。　(3)　99 は第何群の第何項か。

解答　(1)　n^2-n+1　(2)　n^3　(3)　第 10 群の第 5 項

解説

(1)　{　} をはずすと，1，3，5，7，…… は奇数の列で，第 m 項は $2m-1$

第 n 群は n 個の数を含むから，第 n 群の初項 a までの項数は，$n\geqq 2$ のとき

$$\{1+2+\cdots\cdots+(n-1)\}+1=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$$

$n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a=2\times\frac{1}{2}(n^2-n+2)-1=n^2-n+1$

(2)　第 n 群に属する数は，初項 n^2-n+1，公差 2，項数 n の等差数列をなすから，

その和は　$\frac{1}{2}n\{2(n^2-n+1)+(n-1)\cdot 2\}=n^3$

(3)　99 が第 n 群の第 m 項であるとすると　$n^2-n+1\leqq 99<(n+1)^2-(n+1)+1$　より

$$(n-1)n\leqq 98<n(n+1)$$

$9\cdot 10=90$，$10\cdot 11=110$ であるから　$n=10$

したがって，99 は初項 $10^2-10+1=91$，公差 2 の等差数列の第 m 項であるから

$91+(m-1)\cdot 2=99$　ゆえに　$m=5$

よって　第 10 群の第 5 項