数学演習（階差数列•和から一般項•群数列）Ｈ２５．２．１５

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

１．階差数列を利用して，次の数列の一般項 a_n を求めよ。

⑴　1，2，7，16，29，……　　⑵　2，5，14，41，122，……

２．次の数列の一般項 a_n を求めよ。

⑴　10，8，4，-2，-10，……　　⑵　1，2，6，15，31，……

⑶　0，-3，6，-21，60，……

３．初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

⑴　$S_n=n^2-4n$　　⑵　$S_n=n^3$　　⑶　$S_n=2^n-1$

４．初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

⑴　$S_n=n^2-3n$　　⑵　$S_n=n^3+1$　　⑶　$S_n=2^n-3$

５．次の数列の一般項と，初項から第 n 項までの和をそれぞれ求めよ。

0，5，16，33，56，……

6．奇数の数列 1，3，5，…… を

(1)，(3，5)，(7，9，11)，(13，15，17，19)，……

のように，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

(1) 第 n 番目の群の最初の奇数を n の式で表せ。

(2) 第 20 番目の群に入る奇数の和を求めよ。

7．偶数の数列 2，4，6，…… を次のように，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

{2}，{4，6}，{8，10，12}，{14，16，18，20}，……

(1) 第 n 番目の群の最後の数を求めよ。

(2) 第 m 番目の群の最初の数を求めよ。

(3) 第 n 番目の群に入る偶数の和を求めよ。

8．数列 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ \cdots\cdots$ について $\frac{13}{29}$ は第何項か。また，第 244 項を求めよ。

１．階差数列を利用して，次の数列の一般項 a_n を求めよ。

(1)　1，2，7，16，29，……　　　　(2)　2，5，14，41，122，……

解答　(1)　$a_n=2n^2-5n+4$　　(2)　$a_n=\dfrac{3^n+1}{2}$

解説

(1)　この数列の階差数列は　　1，5，9，13，……

これは初項が 1，公差が 4 の等差数列であるから，その一般項を b_n とすると

$$b_n=1+(n-1)\times 4 \qquad \text{すなわち} \qquad b_n=4n-3$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-3)=1+4\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}3=1+4\times\frac{1}{2}(n-1)n-3(n-1)$$

すなわち　　$a_n=2n^2-5n+4$

初項は $a_1=1$ であるから，上の a_n は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項 a_n は　　$a_n=2n^2-5n+4$

(2)　この数列の階差数列は　　3，9，27，81，……

これは初項が 3，公比が 3 の等比数列であるから，その一般項を b_n とすると

$$b_n=3\cdot 3^{n-1} \qquad \text{すなわち} \qquad b_n=3^n$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k\\&=2+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} \qquad \left(\sum_{k=1}^{n-1}3^k\text{は初項3, 公比3,項数}n-1\right)\\&=2+\frac{3\cdot 3^{n-1}-3}{2}\\&=2+\frac{3^n-3}{2}=\frac{4+3^n-3}{2}=\frac{3^n+1}{2}\end{aligned}$$

すなわち　　$a_n=\dfrac{3^n+1}{2}$

初項は $a_1=2$ であるから，上の a_n は $n=1$ のときにも $\dfrac{3+1}{2}=\dfrac{4}{2}=2$ より成り立つ。

したがって，一般項 a_n は　　$a_n=\dfrac{3^n+1}{2}$

２．次の数列の一般項 a_n を求めよ。

(1)　10，8，4，-2，-10，……　　　　(2)　1，2，6，15，31，……

(3)　0，-3，6，-21，60，……

解答　(1)　$a_n=-n^2+n+10$　　(2)　$a_n=\dfrac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$

(3)　$a_n=\dfrac{3}{4}\{(-3)^{n-1}-1\}$

解説

(1)　この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

-2，-4，-6，-8，……

よって　　$b_n=-2n$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=10+\sum_{k=1}^{n-1}(-2k)=10-2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=-n^2+n+10$$

初項は $a_1=10$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　　$a_n=-n^2+n+10$

(2)　この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は　　1，4，9，16，……

よって　　$b_n=n^2$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2\\&=1+\frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}\\&=1+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)\end{aligned}$$

初項は $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　　$a_n=\dfrac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$

(3)　この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は　　-3，9，-27，81，……

よって　　$b_n=(-3)^n$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=0+\sum_{k=1}^{n-1}(-3)^k \qquad \left(\sum_{k=1}^{n-1}(-3)^k\text{は初項}-3\text{, 公比}-3\text{,項数}n-1\right)\\&=\frac{-3\{1-(-3)^{n-1}\}}{1-(-3)}=\frac{3}{4}\{(-3)^{n-1}-1\}\end{aligned}$$

初項は $a_1=0$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　　$a_n=\dfrac{3}{4}\{(-3)^{n-1}-1\}$

３．初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n=n^2-4n$　　　(2)　$S_n=n^3$　　　(3)　$S_n=2^n-1$

解答　(1)　$a_n=2n-5$　　(2)　$a_n=3n^2-3n+1$　　(3)　$a_n=2^{n-1}$

解説

(1)　$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(n^2-4n)-\{(n-1)^2-4(n-1)\}\\&=(n^2-4n)-(n^2-2n+1-4n+4)\\&=2n-5\end{aligned}$$

初項は　　$a_1=S_1=1^2-4\cdot 1=-3$

よって，$a_n=2n-5$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　　$a_n=2n-5$

(2)　$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n^3-(n-1)^3\\&=n^3-(n^3-3n^2+3n-1)\\&=3n^2-3n+1\end{aligned}$$

初項は　　$a_1=S_1=1^3=1$

よって，$a_n=3n^2-3n+1$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　　$a_n=3n^2-3n+1$

(3)　$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)\\&=2\cdot 2^{n-1}-2^{n-1}=(2-1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}\end{aligned}$$

初項は　　$a_1=S_1=2^1-1=1$

よって，$a_n=2^{n-1}$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　　$a_n=2^{n-1}$

４．初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n=n^2-3n$　　　(2)　$S_n=n^3+1$　　　(3)　$S_n=2^n-3$

解答　(1)　$a_n=2n-4$　(2)　$a_n=\begin{cases}2 & (n=1)\\ 3n^2-3n+1 & (n\geqq 2)\end{cases}$　(3)　$a_n=\begin{cases}-1 & (n=1)\\ 2^{n-1} & (n\geqq 2)\end{cases}$

解説

(1)　$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}=(n^2-3n)-\{(n-1)^2-3(n-1)\}\\&=n^2-3n-(n^2-2n+1-3n+3)\\&=2n-4\end{aligned}$$

初項は　　$a_1=S_1=1^2-3\cdot 1=-2$

よって，$a_n=2n-4$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　　$a_n=2n-4$

(2)　$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}=(n^3+1)-\{(n-1)^3+1\}\\&=n^3+1-(n^3-3n^2+3n-1+1)\\&=3n^2-3n+1 \quad \cdots\cdots①\end{aligned}$$

初項は　　$a_1=S_1=1^3+1=2$

したがって　　①式は $n=1$ のとき使えないので

$$a_n=\begin{cases}2 & (n=1)\\ 3n^2-3n+1 & (n\geqq 2)\end{cases}$$

(3)　$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(2^n-3)-(2^{n-1}-3)\\&=2^n-2^{n-1}\\&=2^{n-1}(2-1)=2^{n-1} \quad \cdots\cdots①\end{aligned}$$

初項は　　$a_1=S_1=2^1-3=-1$

したがって　　①式は $n=1$ のとき使えないので

$$a_n=\begin{cases}-1 & (n=1)\\ 2^{n-1} & (n\geqq 2)\end{cases}$$

５．次の数列の一般項と，初項から第 n 項までの和をそれぞれ求めよ。

0，5，16，33，56，……

解答　一般項 $3n^2-4n+1$，和 $\dfrac{1}{2}n(n-1)(2n+1)$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

5，11，17，23，……

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 5，公差 6 の等差数列であるから

$$b_n=5+(n-1)\times 6=6n-1$$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}(6k-1)=6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$$

$=3n^2-4n+1$

初項は $a_1=0$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=3n^2-4n+1$

また，求める和を S_n とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(3k^2-4k+1)$$

$$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)-\frac{4}{2}n(n+1)+\frac{2}{2}n \qquad \left(\frac{1}{2}n\text{でくくった}\right)$$

$$=\frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1)-4(n+1)+2\}$$

$$=\frac{1}{2}n(2n^2-n-1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n-1)(2n+1)$$

6．奇数の数列 1，3，5，…… を

(1)，(3，5)，(7，9，11)，(13，15，17，19)，……

のように，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

(1)　第 n 番目の群の最初の奇数を n の式で表せ。

(2)　第 20 番目の群に入る奇数の和を求めよ。

解答　(1)　n^2-n+1　　(2)　8000

解説

(1)　第 k 番目の群に入る奇数は k 個であるから，$n\geqq2$ のとき，第 1 番目の群から第 $(n-1)$ 番目の群までに入る奇数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n\ (\text{個})$$

よって，第 n 番目の群の最初の奇数は，奇数の数列 1，3，5，…… の

第 $\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$ 項である。この奇数の列の第N項は　$1+(N-1)\cdot2=2N-1$

となるので，Nに$\frac{1}{2}(n-1)n+1$を代入して　$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-1=n^2-n+1$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

(2)　(1) の結果から，第 20 番目の群の最初の奇数は　$n=20$より　$20^2-20+1=381$

第20群には，20項の項が属しているので

よって，求める和は初項 381，公差 2，項数 20 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot20\{2\cdot381+(20-1)\cdot2\}=8000$$

7．偶数の数列 2，4，6，…… を次のように，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

{2}，{4，6}，{8，10，12}，{14，16，18，20}，……

(1)　第 n 番目の群の最後の数を求めよ。

(2)　第 m 番目の群の最初の数を求めよ。

(3)　第 n 番目の群に入る偶数の和を求めよ。

解答　(1)　$n(n+1)$　　(2)　m^2-m+2　　(3)　$n(n^2+1)$

解説

(1)　第 k 番目の群に入る偶数は k 個であるから，第 1 番目の群から第 n 番目の群までに入る偶数は　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ (個)

よって，第 n 番目の群の最後の数は，偶数の数列 2，4，6，…… の第 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 項である。この数列の第N項は　$2+(N-1)\cdot2=2N$　となるので，

Nに$\frac{1}{2}n(n+1)$を代入して　$2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=n(n+1)$

(2)　$m\geqq2$ のとき，第 $(m-1)$ 番目の群の最後の数は，(1) の結果から　$(m-1)m$

よって，第 m 番目の群の最初の数は　$(m-1)m+2=m^2-m+2$　…… ①

① において $m=1$ とすると，$1^2-1+2=2$ となり，① は $m=1$ のときにも成り立つ。

したがって，第 m 番目の群の最初の数は　m^2-m+2

(3)　(1)，(2) の結果から，第 n 番目の群の最初の数は n^2-n+2，最後の数は $n(n+1)$ である。

よって，求める和は初項 n^2-n+2，末項 $n(n+1)$，項数 n の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}n\{(n^2-n+2)+n(n+1)\}=n(n^2+1)$$

8．数列 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{4}$，…… について $\frac{13}{29}$ は第何項か。また，第 244 項を求めよ。

解答　第 419 項，$\frac{13}{22}$

解説

分母が同じもので区切った群数列　$1\ \left|\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2}\ \right|\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3}\ \right|$ …… において，$\frac{13}{29}$ は第 29 群の 13 番目の項である。

$\sum_{k=1}^{28}k+13=\frac{1}{2}\cdot28\cdot29+13=419$ であるから，$\frac{13}{29}$ は　第 419 項

また，第 244 項が第 n 群に含まれるとすると　$\sum_{k=1}^{n-1}k<244\leqq\sum_{k=1}^{n}k$

よって　$\frac{1}{2}(n-1)n<244\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$

すなわち　$n(n+1)<488\leqq n(n+1)$

$n(n-1)$，$n(n+1)$ はともに n が増加すると増加し，$22\cdot21=462<488<506=22\cdot23$ から，$n=22$ のみ適する。 $(\sqrt{488}=2\sqrt{122}\fallingdotseq2\sqrt{121}=2\times11=22)$

ここで，第21群の最後の項は最初から数えて　$1+2+\cdots\cdots+21=\sum_{k=1}^{21}k$ 番目なので

$244-\sum_{k=1}^{21}k=244-\frac{1}{2}\cdot21\cdot22=13$ から，第 244 項は　$\frac{13}{22}$