数学演習（いろいろな和･群数列）Ｈ２３．１２．３　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

１．次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　$3^2,\ 6^2,\ 9^2,\ 12^2,\ \cdots\cdots$　　(2)　$1\cdot5,\ 2\cdot7,\ 3\cdot9,\ 4\cdot11,\ \cdots\cdots$

(3)　$2,\ 2+4,\ 2+4+6,\ 2+4+6+8,\ \cdots\cdots$

(4)　$1,\ 1+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2},\ \cdots\cdots$

２．次の和を求めよ。

(1)　$\sum_{k=1}^{n} k(k^2+1)$　　(2)　$\sum_{k=1}^{n}(3n-k+1)$　　(3)　$\sum_{k=5}^{14}(2k-9)$

３．一般項が $2n\cdot3^{n-1}$ で表される数列の初項から第 n 項までの和

$$S=2\cdot1+4\cdot3+6\cdot3^2+\cdots\cdots+2n\cdot3^{n-1}$$

を求めよ。

４．次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。$\frac{1}{1\cdot5},\ \frac{1}{5\cdot9},\ \frac{1}{9\cdot13},\ \cdots\cdots$

５．和 $\sum_{k=1}^{n} k\,2^k$ を求めよ。

6．次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k^2-k+1)$　　(2) $\sum_{k=1}^{n}(n-3k)$

(3) $\sum_{k=4}^{12}(6k-1)$

7．次の和を求めよ。

(1) $2^2+4^2+6^2+8^2+\cdots\cdots+(2n)^2$

(2) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot5+3\cdot4\cdot7+4\cdot5\cdot9+\cdots\cdots+n(n+1)(2n+1)$

8．次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $1,\ 1+4,\ 1+4+7,\ \cdots\cdots$　　(2) $1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ \cdots\cdots$

9．(1) $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}2\right)$ を計算せよ。

(2) 次の数列の和を求めよ。

$1\cdot n,\ \ 2\cdot(n-1),\ \ 3\cdot(n-2),\ \ \cdots\cdots,\ (n-1)\cdot2,\ \ n\cdot1$

10. (1) 数列 $\frac{1}{1\cdot3},\ \frac{1}{3\cdot5},\ \frac{1}{5\cdot7},\ \cdots\cdots,$ の初項から第n項までの和を求めよ。

(2) 数列 $1\cdot1,\ 3\cdot3,\ 5\cdot3^2,\ \cdots\cdots,$ の初項から第n項までの和を求めよ。

11. 和 $\sum_{k=1}^{n}k\,2^{k-1}$ を求めよ。

数学演習（いろいろな和•群数列）Ｈ２３．１２．３　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

1．次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) 3^2, 6^2, 9^2, 12^2, ……　　(2) $1\cdot 5$, $2\cdot 7$, $3\cdot 9$, $4\cdot 11$, ……

(3) 2, $2+4$, $2+4+6$, $2+4+6+8$, ……

(4) 1, $1+\frac{1}{3}$, $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}$, ……

解答　(1) $\frac{3}{2}n(n+1)(2n+1)$　(2) $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+11)$　(3) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(4) $\frac{3}{2}n-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

解説

(1) 第 k 項は　$(3k)^2=9k^2$

ゆえに　$\sum_{k=1}^{n}9k^2=9\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{3}{2}n(n+1)(2n+1)$

(2) 第 k 項は　$k(2k+3)$

ゆえに　$\sum_{k=1}^{n}k(2k+3)=\sum_{k=1}^{n}(2k^2+3k)=2\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k$

$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)+9\}=\frac{1}{6}n(n+1)(4n+11)$$

(3) 第 k 項は　$2+4+6+\cdots\cdots+2k=\sum_{i=1}^{k}2i=2\cdot\frac{1}{2}k(k+1)=k^2+k$

ゆえに，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(4) 第 k 項は　$1+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^{k-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}$

ゆえに，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}1-\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{3}{2}n-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{3}{2}n-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

2．次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}k(k^2+1)$　(2) $\sum_{k=1}^{n}(3n-k+1)$　(3) $\sum_{k=5}^{14}(2k-9)$

解答　(1) $\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2)$　(2) $\frac{1}{2}n(5n+1)$　(3) 100

解説

(1) $\sum_{k=1}^{n}k(k^2+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+k)=\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k$

$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2\}$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2)$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(3n-k+1)=\sum_{k=1}^{n}(3n+1)-\sum_{k=1}^{n}k=(3n+1)n-\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{2}n\{2(3n+1)-(n+1)\}=\frac{1}{2}n(5n+1)$$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(2k-9)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}9=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-9n=n(n-8)$

ゆえに　$\sum_{k=5}^{14}(2k-9)=\sum_{k=1}^{14}(2k-9)-\sum_{k=1}^{4}(2k-9)$

$$=14(14-8)-4(4-8)=100$$

別解　$k-4=i$ とおくと　$2k-9=2(i+4)-9=2i-1$

また，$5\leqq k\leqq 14$ のとき　$1\leqq i\leqq 10$

ゆえに　$\sum_{k=5}^{14}(2k-9)=\sum_{i=1}^{10}(2i-1)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 10(10+1)-10=100$

3．一般項が $2n\cdot 3^{n-1}$ で表される数列の初項から第 n 項までの和

$$S=2\cdot 1+4\cdot 3+6\cdot 3^2+\cdots\cdots+2n\cdot 3^{n-1}$$

を求めよ。

解答　$S=\frac{1}{2}\{(2n-1)\cdot 3^n+1\}$

解説

$$S=2\cdot 1+4\cdot 3+6\cdot 3^2+\cdots\cdots+2n\cdot 3^{n-1}$$

両辺に 3 を掛けると

$$3S=\quad 2\cdot 3+4\cdot 3^2+\cdots\cdots+2(n-1)\cdot 3^{n-1}+2n\cdot 3^n$$

辺々引くと

$$S-3S=2\cdot 1+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\cdots\cdots+2\cdot 3^{n-1}-2n\cdot 3^n$$

$$=2(1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-1})-2n\cdot 3^n$$

$$=2\cdot\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}-2n\cdot 3^n$$

$$=(1-2n)\cdot 3^n-1$$

ゆえに，$-2S=(1-2n)\cdot 3^n-1$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\{(2n-1)\cdot 3^n+1\}$$

4．次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。$\frac{1}{1\cdot 5}$, $\frac{1}{5\cdot 9}$, $\frac{1}{9\cdot 13}$, ……

解答　$\frac{n}{4n+1}$

解説

第 k 項は

$$\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4k+1)-(4k-3)}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)$$

ゆえに，初項から第 n 項までの和は

$$\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{n}{4n+1}$$

5．和 $\sum_{k=1}^{n}k\,2^k$ を求めよ。

解答　$(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$

解説

$S_n=\sum_{k=1}^{n}k\,2^k$ とおくと

$$S_n=1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots\cdots+n2^n$$

$$2S_n=\quad 1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n2^{n+1}$$

辺々を引くと

$$-S_n=2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n-n2^{n+1}$$

$$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n2^{n+1}=(1-n)\cdot 2^{n+1}-2$$

よって　$S_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$　すなわち　$\sum_{k=1}^{n}k\,2^k=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$

6．次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k^2-k+1)$　(2) $\sum_{k=1}^{n}(n-3k)$

(3) $\sum_{k=4}^{12}(6k-1)$

解答　(1) $\frac{1}{4}n(n^3+2n^2+n+4)$　(2) $-\frac{1}{2}n(n+3)$　(3) 423

解説

(1) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k^2-k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+1)=\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}1$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+n=\frac{1}{4}n\{n(n+1)^2+4\}$$

$$=\frac{1}{4}n(n^3+2n^2+n+4)$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(n-3k)=n\sum_{k=1}^{n}1-3\sum_{k=1}^{n}k=n^2-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{2}n\{2n-3(n+1)\}=-\frac{1}{2}n(n+3)$$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(6k-1)=6\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=n(3n+2)$

ゆえに　$\sum_{k=4}^{12}(6k-1)=\sum_{k=1}^{12}(6k-1)-\sum_{k=1}^{3}(6k-1)=12(3\cdot 12+2)-3(3\cdot 3+2)$

$$=456-33=423$$

別解　$k-3=i$ とおくと，$k=i+3$ から

$6k-1=6(i+3)-1=6i+17$　また　$1\leqq i\leqq 9$

ゆえに　$\sum_{k=4}^{12}(6k-1)=\sum_{i=1}^{9}(6i+17)=6\cdot\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10+17\cdot 9=423$

7．次の和を求めよ。

(1) $2^2+4^2+6^2+8^2+\cdots\cdots+(2n)^2$

(2) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 5+3\cdot 4\cdot 7+4\cdot 5\cdot 9+\cdots\cdots+n(n+1)(2n+1)$

解答　(1) $\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$　(2) $\frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)$

解説

求める和を S とする。

(1)　求める和は，第 k 項が $(2k)^2$ である数列の，初項から第 n 項までの和であるから

$$S=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=\sum_{k=1}^{n}4k^2=4\sum_{k=1}^{n}k^2=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

(2)　求める和は，第 k 項が $k(k+1)(2k+1)$ である数列の，初項から第 n 項までの和であるから

$$S=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)=2\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=2\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}=\frac{1}{2}n(n+1)(n^2+3n+2)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)$$

8．次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　$1,\ 1+4,\ 1+4+7,\ \cdots\cdots$　　(2)　$1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ \cdots\cdots$

解答　(1)　$\frac{1}{2}n^2(n+1)$　　(2)　$2^{n+1}-n-2$

解説

与えられた数列の第 k 項を a_k とし，求める和を S_n とする。

(1)　$a_k=1+4+7+\cdots\cdots+\{1+(k-1)\cdot3\}=\frac{1}{2}k\{2+3(k-1)\}=\frac{1}{2}(3k^2-k)$

ゆえに　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(3k^2-k)=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)\{(2n+1)-1\}=\frac{1}{2}n^2(n+1)$$

(2)　$a_k=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^k-1)}{2-1}=2^k-1$

ゆえに　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$

9．(1)　$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}2\right)$ を計算せよ。

(2)　次の数列の和を求めよ。

$1\cdot n,\ 2\cdot(n-1),\ 3\cdot(n-2),\ \cdots\cdots,\ (n-1)\cdot2,\ n\cdot1$

解答　(1)　$n(n+1)$　　(2)　$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

解説

(1)　$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}2\right)=\sum_{l=1}^{n}2l=2\sum_{l=1}^{n}l=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=n(n+1)$

(2)　この数列の第 k 項は　$k\{n+(k-1)\cdot(-1)\}=-k^2+(n+1)k$

したがって，求める和を S とすると

$$S=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}=-\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+1)\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

10．(1)　数列 $\frac{1}{1\cdot3},\ \frac{1}{3\cdot5},\ \frac{1}{5\cdot7},\ \cdots\cdots,$ の初項から第n項までの和を求めよ。

(2)　数列 $1\cdot1,\ 3\cdot3,\ 5\cdot3^2,\ \cdots\cdots,$ の初項から第n項までの和を求めよ。

解答　(1)　$\frac{n}{2n+1}$　　(2)　$(n-1)\cdot3^n+1$

解説

(1)　$\frac{1}{1\cdot3},\ \frac{1}{3\cdot5},\ \frac{1}{5\cdot7},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$　より

第 k 項は　$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$　と表されるから，

求める和を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

(2)　求める和を S とすると

$$S=1\cdot1+3\cdot3+5\cdot3^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$$

$$3S=\qquad 1\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot3^{n-1}+(2n-1)\cdot3^n$$

辺々を引くと

$$-2S=1+2\cdot3+2\cdot3^2+\cdots\cdots+2\cdot3^{n-1}-(2n-1)\cdot3^n$$

（初項2･3，公比3項数$n-1$）

$$=1+\frac{2\cdot3(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot3^n=-2(n-1)\cdot3^n-2$$

ゆえに　$S=(n-1)\cdot3^n+1$

11．和 $\sum_{k=1}^{n}k\,2^{k-1}$ を求めよ。

解答　$(n-1)\cdot2^n+1$

解説

$S_n=\sum_{k=1}^{n}k\,2^{k-1}$ とおくと

$$S_n=1\cdot2^0+2\cdot2^1+3\cdot2^2+\cdots\cdots+n2^{n-1}$$

$$2S_n=\qquad 1\cdot2^1+2\cdot2^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n2^n$$

辺々を引くと

$$-S_n=1+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}-n2^n$$

$$=\frac{1(2^n-1)}{2-1}-n2^n=(1-n)\cdot2^n-1$$

よって　　$S_n=(n-1)\cdot2^n+1$　　すなわち　　$\sum_{k=1}^{n}k\,2^{k-1}=(n-1)\cdot2^n+1$