数学演習（いろいろな和•群数列）Ｈ２３．１２．２　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１. 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) 3^2, 6^2, 9^2, 12^2, ……

(2) $1\cdot5$, $2\cdot7$, $3\cdot9$, $4\cdot11$, ……

(3) 2, $2+4$, $2+4+6$, $2+4+6+8$, ……

(4) 1, $1+\dfrac{1}{3}$, $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}$, ……

２. 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k^2+1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3n-k+1)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=5}^{14} (2k-9)$

３. 一般項が $2n\cdot3^{n-1}$ で表される数列の初項から第 n 項までの和

$$S=2\cdot1+4\cdot3+6\cdot3^2+\cdots\cdots+2n\cdot3^{n-1}$$

を求めよ。

４. 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。$\dfrac{1}{1\cdot5}$, $\dfrac{1}{5\cdot9}$, $\dfrac{1}{9\cdot13}$, ……

５. 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,2^k$ を求めよ。

6．数列 $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{1}{5}$, …… について

(1)　$\frac{5}{8}$ は第何項か。

(2)　この数列の第 800 項を求めよ。

(3)　この数列の初項から第 800 項までの和を求めよ。

7．奇数の数列 1，3，5，…… を

(1)，(3，5)，(7，9，11)，(13，15，17，19)，……

のように，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

(1)　第 n 番目の群の最初の奇数を n の式で表せ。

(2)　第 20 番目の群に入る奇数の和を求めよ。

8．数列 1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，5，5，5，5，5，6，…… の第 n 項を a_n とする。

この数列を

1 | 2，2 | 3，3，3 | 4，4，4，4 | 5，5，5，5，5 | 6，……

のように 1 個，2 個，3 個，4 個，…… と区画に分ける。

(1)　第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の個数を求めよ。

(2)　第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の総和を求めよ。

(3)　$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n \geqq 3000$ となる最小の自然数 n を求めよ。

1．次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　$3^2,\ 6^2,\ 9^2,\ 12^2,\ \cdots\cdots$　　(2)　$1\cdot5,\ 2\cdot7,\ 3\cdot9,\ 4\cdot11,\ \cdots\cdots$

(3)　$2,\ 2+4,\ 2+4+6,\ 2+4+6+8,\ \cdots\cdots$

(4)　$1,\ 1+\dfrac{1}{3},\ 1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2},\ \cdots\cdots$

解答　(1)　$\dfrac{3}{2}n(n+1)(2n+1)$　(2)　$\dfrac{1}{6}n(n+1)(4n+11)$　(3)　$\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(4)　$\dfrac{3}{2}n-\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

解説

(1)　第 k 項は　$(3k)^2=9k^2$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}9k^2=9\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{3}{2}n(n+1)(2n+1)$

(2)　第 k 項は　$k(2k+3)$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(2k+3)=\sum_{k=1}^{n}(2k^2+3k)=2\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k$

$\displaystyle=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)+9\}=\frac{1}{6}n(n+1)(4n+11)$

(3)　第 k 項は　$\displaystyle 2+4+6+\cdots\cdots+2k=\sum_{i=1}^{k}2i=2\cdot\frac{1}{2}k(k+1)=k^2+k$

ゆえに，求める和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3)$

$\displaystyle=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(4)　第 k 項は　$\displaystyle 1+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^{k-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}$

ゆえに，求める和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}1-\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{3}{2}n-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$

$\displaystyle=\frac{3}{2}n-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2．次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k^2+1)$　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3n-k+1)$　　(3)　$\displaystyle\sum_{k=5}^{14}(2k-9)$

解答　(1)　$\dfrac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2)$　(2)　$\dfrac{1}{2}n(5n+1)$　(3)　100

解説

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k^2+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+k)=\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k$

$\displaystyle=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2\}$

$\displaystyle=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2)$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3n-k+1)=\sum_{k=1}^{n}(3n+1)-\sum_{k=1}^{n}k=(3n+1)n-\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n\{2(3n+1)-(n+1)\}=\frac{1}{2}n(5n+1)$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-9)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}9=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-9n=n(n-8)$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=5}^{14}(2k-9)=\sum_{k=1}^{14}(2k-9)-\sum_{k=1}^{4}(2k-9)$

$=14(14-8)-4(4-8)=100$

別解　$k-4=i$ とおくと　$2k-9=2(i+4)-9=2i-1$

また，$5\leqq k\leqq14$ のとき　$1\leqq i\leqq10$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=5}^{14}(2k-9)=\sum_{i=1}^{10}(2i-1)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot10(10+1)-10=100$

3．一般項が $2n\cdot3^{n-1}$ で表される数列の初項から第 n 項までの和

$S=2\cdot1+4\cdot3+6\cdot3^2+\cdots\cdots+2n\cdot3^{n-1}$

を求めよ。

解答　$S=\dfrac{1}{2}\{(2n-1)\cdot3^n+1\}$

解説

$S=2\cdot1+4\cdot3+6\cdot3^2+\cdots\cdots+2n\cdot3^{n-1}$

両辺に 3 を掛けると

$3S=\quad 2\cdot3+4\cdot3^2+\cdots\cdots+2(n-1)\cdot3^{n-1}+2n\cdot3^n$

辺々引くと

$S-3S=2\cdot1+2\cdot3+2\cdot3^2+\cdots\cdots+2\cdot3^{n-1}-2n\cdot3^n$

$=2(1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-1})-2n\cdot3^n$

$=2\cdot\dfrac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}-2n\cdot3^n$

$=(1-2n)\cdot3^n-1$

ゆえに，$-2S=(1-2n)\cdot3^n-1$ であるから

$S=\dfrac{1}{2}\{(2n-1)\cdot3^n+1\}$

4．次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。$\dfrac{1}{1\cdot5},\ \dfrac{1}{5\cdot9},\ \dfrac{1}{9\cdot13},\ \cdots\cdots$

解答　$\dfrac{n}{4n+1}$

解説

第 k 項は

$\displaystyle\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4k+1)-(4k-3)}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)$

ゆえに，初項から第 n 項までの和は

$\displaystyle\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right\}$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{n}{4n+1}$

5．和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\,2^k$ を求めよ。

解答　$(n-1)\cdot2^{n+1}+2$

解説

$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}k\,2^k$ とおくと

$S_n=1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots\cdots+n2^n$

$2S_n=\qquad 1\cdot2^2+2\cdot2^3+\cdots\cdots+(n-1)\cdot2^n+n2^{n+1}$

辺々を引くと

$-S_n=2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n-n2^{n+1}$

$=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}-n2^{n+1}=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$

よって　$S_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$　すなわち　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\,2^k=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$

6．数列 $\dfrac{1}{1},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{3}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{5}{4},\ \dfrac{7}{4},\ \dfrac{1}{5},\ \cdots\cdots$ について

(1)　$\dfrac{5}{8}$ は第何項か。　(2)　この数列の第 800 項を求めよ。

(3)　この数列の初項から第 800 項までの和を求めよ。

解答　(1)　第 31 項　(2)　$\dfrac{39}{40}$　(3)　790

解説

$\dfrac{1}{1}\,\Big|\,\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\,\Big|\,\dfrac{1}{3},\ \dfrac{3}{3},\ \dfrac{5}{3}\,\Big|\,\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{5}{4},\ \dfrac{7}{4}\,\Big|\,\dfrac{1}{5},\ \cdots\cdots$

のように群に分ける。

(1)　$\dfrac{5}{8}$ は第 8 群の 3 番目の項である。第1群から第7群までには $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}k$ 個の項があるので

$\displaystyle\sum_{k=1}^{7}k+3=31$ であるから　第 31 項

(2)　第 800 項が第 n 群に含まれるとすると　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k<800\leqq\sum_{k=1}^{n}k$

よって　$(n-1)n<1600\leqq n(n+1)$

これを満たす自然数 n は　$39\cdot40=1560$，$40\cdot41=1640$ より　$n=40$

（$\sqrt{1600}=40$ より見当をつけてもいい）

第39群の最後の項は，最初から数えて $\displaystyle 1+2+3+\cdots+39=\sum_{k=1}^{39}k$ 番目なので

$\displaystyle 800-\sum_{k=1}^{39}k=20$ であるから　第800項は　$\dfrac{39}{40}$

(3)　第 n 群の n 個の分数の和は　$\displaystyle\frac{1}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{2n-1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\cdot n^2=n$

ゆえに，第1群から第39群までは，群ごとに加え，第40群は $\dfrac{1}{40}$ から $\dfrac{39}{40}$ までの

20項を足せばよい。求める和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{39}k+\left(\frac{1}{40}+\frac{3}{40}+\frac{5}{40}+\cdots\cdots+\frac{39}{40}\right)=\frac{1}{2}\cdot39\cdot40+\frac{1}{40}\left\{\frac{1}{2}\cdot20(1+39)\right\}=790$

7．奇数の数列 1，3，5，…… を

(1)，(3，5)，(7，9，11)，(13，15，17，19)，……

のように，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

(1)　第 n 番目の群の最初の奇数を n の式で表せ。

(2)　第 20 番目の群に入る奇数の和を求めよ。

解答　(1)　n^2-n+1　　(2)　8000

解説

(1)　第 k 番目の群に入る奇数は k 個であるから，$n\geqq 2$ のとき，第 1 番目の群から第 $(n-1)$ 番目の群までに入る奇数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n\ (\text{個})$$

よって，第 n 番目の群の最初の奇数は，奇数の数列 1，3，5，…… の第 $\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$ 項である。この奇数の列の第N項は　$1+(N-1)\cdot 2=2N-1$

となるので，Nに$\frac{1}{2}(n-1)n+1$を代入して　　$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-1=n^2-n+1$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

(2)　(1) の結果から，第 20 番目の群の最初の奇数は　$n=20$より　$20^2-20+1=381$

第20群には，20項の項が属しているので

よって，求める和は初項 381，公差 2，項数 20 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 20\{2\cdot 381+(20-1)\cdot 2\}=8000$$

8．数列 1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，5，5，5，5，5，6，…… の第 n 項を a_n とする。

この数列を

1 | 2，2 | 3，3，3 | 4，4，4，4 | 5，5，5，5，5 | 6，……

のように 1 個，2 個，3 個，4 個，…… と区画に分ける。

(1)　第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の個数を求めよ。

(2)　第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の総和を求めよ。

(3)　$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n\geqq 3000$ となる最小の自然数 n を求めよ。

解答　(1)　210 個　　(2)　2870　　(3)　217

解説

(1)　第 k 区画に含まれる項の個数は k である。

よって，第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の個数は

$$1+2+\cdots+20=\sum_{k=1}^{20}k=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21=210\ (\text{個})$$

(2)　第 k 区画に含まれる項の総和は

$$k+k+\cdots+k=k\cdot k=k^2$$

よって，第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の総和は

$$1^2+2^2+\cdots+20^2=\sum_{k=1}^{20}k^2=\frac{1}{6}\cdot 20\cdot 21\cdot 41=2870$$

(3)　第 21 区画の総和は　　$21^2=441$

(2) より，第 1 区画から第 21 区画までの区画に含まれる項の総和は

$$2870+441=3311$$

よって，第21区画のある数までの和で初めて3000を超えるので

a_n は第 21 区画に含まれる。

$3000-2870=130$ であるから，第21区画の1番目から何番目までの和で

130を超えるか考えると，$21\cdot 6=126$，$21\cdot 7=147$ であるから，

7番目までで130を初めて超える。よって，求める最小の自然数 n の

値は　　$n=210+7=217$