数学演習（数列）Ｈ２２．７．２　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．数列1，2，5，14，41，…… の一般項 a_n を求めよ。

２．次の数列の一般項 a_n を求めよ。

(1)　10，8，4，-2，-10，……　　(2)　1，2，6，15，31，……

(3)　0，-3，6，-21，60，……

３．次の数列の一般項と，初項から第 n 項までの和をそれぞれ求めよ。

0，5，16，33，56，……

４．初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n=n^2-4n$　　(2)　$S_n=n^3$　　(3)　$S_n=2^n-1$

1．数列1，2，5，14，41，…… の一般項 a_n を求めよ。

解答　$a_n=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

解説

この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は　1，3，9，27，……

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項1，公比3の等比数列であるから　$b_n=1\cdot 3^{n-1}$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}1\cdot 3^{k-1}=1+\frac{1\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

初項は $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

2．次の数列の一般項 a_n を求めよ。

(1)　10，8，4，-2，-10，……　　(2)　1，2，6，15，31，……

(3)　0，-3，6，-21，60，……

解答　(1)　$a_n=-n^2+n+10$　　(2)　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$

(3)　$a_n=\frac{3}{4}\{(-3)^{n-1}-1\}$

解説

(1)　この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

-2，-4，-6，-8，……

よって　$b_n=-2n$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=10+\sum_{k=1}^{n-1}(-2k)=10-2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=-n^2+n+10$$

初項は $a_1=10$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=-n^2+n+10$

(2)　この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は　1，4，9，16，……

よって　$b_n=n^2$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2=1+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$$

初項は $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$

(3)　この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は　-3，9，-27，81，……

よって　$b_n=(-3)^n$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}(-3)^k=\frac{-3\{1-(-3)^{n-1}\}}{1-(-3)}=\frac{3}{4}\{(-3)^{n-1}-1\}$

初項は $a_1=0$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{3}{4}\{(-3)^{n-1}-1\}$

3．次の数列の一般項と，初項から第 n 項までの和をそれぞれ求めよ。

0，5，16，33，56，……

解答　一般項 $3n^2-4n+1$，和 $\frac{1}{2}n(n-1)(2n+1)$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

5，11，17，23，……

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項5，公差6の等差数列であるから

$b_n=5+(n-1)\times 6=6n-1$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}(6k-1)=6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$$
$$=3n^2-4n+1$$

初項は $a_1=0$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=3n^2-4n+1$

また，求める和を S_n とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(3k^2-4k+1)$$
$$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$=\frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1)-4(n+1)+2\}$$
$$=\frac{1}{2}n(2n^2-n-1)$$
$$=\frac{1}{2}n(n-1)(2n+1)$$

4．初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n=n^2-4n$　　(2)　$S_n=n^3$　　(3)　$S_n=2^n-1$

解答　(1)　$a_n=2n-5$　　(2)　$a_n=3n^2-3n+1$　　(3)　$a_n=2^{n-1}$

解説

(1)　$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-4n)-\{(n-1)^2-4(n-1)\}$
$=2n-5$

初項は　$a_1=S_1=1^2-4\cdot 1=-3$

よって，$a_n=2n-5$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=2n-5$

(2)　$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=n^3-(n-1)^3$
$=3n^2-3n+1$

初項は　$a_1=S_1=1^3=1$

よって，$a_n=3n^2-3n+1$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=3n^2-3n+1$

(3)　$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)$
$=2\cdot 2^{n-1}-2^{n-1}=2^{n-1}$

初項は　$a_1=S_1=2^1-1=1$

よって，$a_n=2^{n-1}$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=2^{n-1}$