数学演習（いろいろな数列）R１．１１．２４　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k+2)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)(4k^2-2k+1)$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=11}^{20}(6k-1)$

$\boxed{2}$ 次の数列の初項から第 $n$ 項までの和を求めよ。

(1) $1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ \cdots\cdots$　　(2) $1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ \cdots\cdots$

$\boxed{3}$ 次の数列の和を求めよ。

$1\cdot(n+1),\ 2\cdot n,\ 3\cdot(n-1),\ \cdots\cdots,\ (n-1)\cdot 3,\ n\cdot 2$

$\boxed{4}$ 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$2,\ 7,\ 18,\ 35,\ 58,\ \cdots\cdots$

$\boxed{5}$ 次の数列の一般項を求めよ。

$6,\ 24,\ 60,\ 120,\ 210,\ 336,\ 504,\ \cdots\cdots$

$\boxed{6}$ 初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が $S_n=2n^2-n$ となる数列 $\{a_n\}$ について

(1) 一般項 $a_n$ を求めよ。

(2) 和 $a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots+a_{2n-1}$ を求めよ。

$\boxed{7}$ 数列 $\frac{1}{1\cdot 3}$, $\frac{1}{3\cdot 5}$, $\frac{1}{5\cdot 7}$, ……, $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ の和を求めよ。

$\boxed{8}$ 次の数列の和 $S$ を求めよ。

(1) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$, $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$, $\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}$, ……, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(2) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, ……, $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$ $(n \geqq 2)$

$\boxed{9}$ 次の数列の和を求めよ。

$1\cdot 1$, $3\cdot 3$, $5\cdot 3^2$, ……, $(2n-1)\cdot 3^{n-1}$

$\boxed{10}$ $xy$ 平面において，次の連立不等式の表す領域に含まれる格子点（$x$ 座標，$y$ 座標がともに整数である点）の個数を求めよ。ただし，$n$ は自然数とする。

(1)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+2y \leqq 2n$　　　(2)　$x \geqq 0$，$y \leqq n^2$，$y \geqq x^2$

$\boxed{11}$ 次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=2n}^{3n}(3k^2+5k-1)$　　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}2\right)$　　　(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}3\cdot 2^{i-1}\right)$

数学演習（いろいろな数列）Ｒ１．１１．２４　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k+2)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)(4k^2-2k+1)$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=11}^{20}(6k-1)$

解答　(1)　$n(n^2+n+2)$　　(2)　$n(2n^3+4n^2+2n+1)$　　(3)　920

解説

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k+2)=3\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k+2\sum_{k=1}^{n}1=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)+2n$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1)-(n+1)+4\}=n(n^2+n+2)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)(4k^2-2k+1)=\sum_{k=1}^{n}(8k^3+1)=8\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}1=8\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+n$

$=2n^2(n+1)^2+n=n\{2n(n+1)^2+1\}$

$=n(2n^3+4n^2+2n+1)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k-1)=6\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=n(3n+2)$

よって　$\displaystyle\sum_{k=11}^{20}(6k-1)=\sum_{k=1}^{20}(6k-1)-\sum_{k=1}^{10}(6k-1)=20(60+2)-10(30+2)$

$=1240-320=920$

別解　$k=m+10$ とおくと，$k=11$ のとき $m=1$，$k=20$ のとき $m=10$ であるから

$\displaystyle\sum_{k=11}^{20}(6k-1)=\sum_{m=1}^{10}\{6(m+10)-1\}=\sum_{m=1}^{10}(6m+59)$

$\displaystyle=6\cdot\frac{1}{2}\cdot10\cdot11+59\cdot10=920$

2 次の数列の初項から第 $n$ 項までの和を求めよ。

(1) $1^2$，$3^2$，$5^2$，……　　(2) 1，$1+2$，$1+2+2^2$，……

解答　(1)　$\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$　　(2)　$2^{n+1}-n-2$

解説

与えられた数列の第 $k$ 項を $a_k$ とし，求める和を $S_n$ とする。

(1) $a_k=(2k-1)^2$

よって　$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$\displaystyle=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$

$\displaystyle=\frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$

$\displaystyle=\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$

(2) $\displaystyle a_k=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^k-1)}{2-1}=2^k-1$

よって　$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n$

$=2^{n+1}-n-2$

3 次の数列の和を求めよ。

$1\cdot(n+1)$，$2\cdot n$，$3\cdot(n-1)$，……，$(n-1)\cdot3$，$n\cdot2$

解答　$\frac{1}{6}n(n+1)(n+5)$

解説

この数列の第 $k$ 項は　$k\{(n+1)+(k-1)\cdot(-1)\}=-k^2+(n+2)k$

したがって，求める和を $S$ とすると

$\displaystyle S=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+2)k\}=-\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+2)\sum_{k=1}^{n}k$

$\displaystyle=-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+2)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+2)\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+5)$

別解　求める和を $S$ とすると

$S=1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+\cdots\cdots+n)+(1+2+\cdots\cdots+n)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}(1+2+\cdots\cdots+k)+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k+n(n+1)\right\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)+n(n+1)\right\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3+6\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+5)$

4 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

2，7，18，35，58，……

解答　$a_n=3n^2-4n+3$

解説

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$\{a_n\}$：2，7，18，35，58，……

$\{b_n\}$：5，11，17，23，……

数列 $\{b_n\}$ は，初項 5，公差 6 の等差数列であるから

$b_n=5+(n-1)\cdot6=6n-1$

$n\geqq2$ のとき

$\displaystyle a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(6k-1)=2+6\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$

$\displaystyle=2+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)=3n^2-4n+3$　……①

$n=1$ のとき　$3n^2-4n+3=3\cdot1^2-4\cdot1+3=2$

初項は $a_1=2$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=3n^2-4n+3$

5 次の数列の一般項を求めよ。

6，24，60，120，210，336，504，……

解答　$n(n+1)(n+2)$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$，その階差数列を $\{b_n\}$ とする。

また，数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると

$\{a_n\}$：6，24，60，120，210，336，504，……

$\{b_n\}$：18，36，60，90，126，168，……

$\{c_n\}$：18，24，30，36，42，……

数列 $\{c_n\}$ は，初項 18，公差 6 の等差数列であるから

$c_n=18+(n-1)\cdot6=6n+12$

$n\geqq2$ のとき　$\displaystyle b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=18+\sum_{k=1}^{n-1}(6k+12)$

$\displaystyle=18+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+12(n-1)=3n^2+9n+6$

この式に $n=1$ を代入すると，$b_1=3+9+6=18$ となるから

$b_n=3n^2+9n+6$　$(n\geqq1)$

よって，$n\geqq2$ のとき

$\displaystyle a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=6+\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2+9k+6)$

$\displaystyle=6+3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+9\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+6(n-1)$

$\displaystyle=\frac{n}{2}\cdot2(n^2+3n+2)=n(n+1)(n+2)$

この式に $n=1$ を代入すると，$a_1=1\cdot2\cdot3=6$ となるから，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=n(n+1)(n+2)$

6 初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が $S_n=2n^2-n$ となる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　一般項 $a_n$ を求めよ。

(2)　和 $a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots+a_{2n-1}$ を求めよ。

解答　(1)　$a_n=4n-3$　　(2)　$n(4n-3)$

解説

(1)　$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2-n)-\{2(n-1)^2-(n-1)\}$

$=4n-3$　……①

また　$a_1=S_1=2\cdot1^2-1=1$

ここで，① において $n=1$ とすると　$a_1=4\cdot1-3=1$

よって，$n=1$ のときにも ① は成り立つ。

したがって　$a_n=4n-3$

(2)　(1) より，$a_{2k-1}=4(2k-1)-3=8k-7$ であるから

$\displaystyle a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots+a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}(8k-7)$

$\displaystyle=8\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-7n=n(4n-3)$

7 数列 $\displaystyle\frac{1}{1\cdot3}$，$\displaystyle\frac{1}{3\cdot5}$，$\displaystyle\frac{1}{5\cdot7}$，……，$\displaystyle\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ の和を求めよ。

解答　$\dfrac{n}{2n+1}$

解説

この数列の第 $k$ 項は

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

求める和を $S$ とすると

$$S=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

8 次の数列の和 $S$ を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}$, $\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}$, $\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}$, ……, $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, ……, $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$　$(n\geqq2)$

解答　(1) $S=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$　(2) $S=\dfrac{1}{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2})$

解説

(1) 第 $k$ 項は　$\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\dfrac{1}{2\cdot3}-\dfrac{1}{3\cdot4}\right)+\left(\dfrac{1}{3\cdot4}-\dfrac{1}{4\cdot5}\right)\right.$

$\left.+\cdots\cdots+\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(n+1)(n+2)-2}{2(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

(2) 第 $k$ 項は　$\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}=\dfrac{\sqrt{k}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$+\cdots\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\}$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2})$

9 次の数列の和を求めよ。

$1\cdot1$, $3\cdot3$, $5\cdot3^2$, ……, $(2n-1)\cdot3^{n-1}$

解答　$(n-1)\cdot3^n+1$

解説

求める和を $S$ とすると

$S=1\cdot1+3\cdot3+5\cdot3^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$

両辺に3を掛けると

$3S=\qquad 1\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot3^{n-1}+(2n-1)\cdot3^n$

辺々を引くと

$-2S=1+\ 2\cdot3+2\cdot3^2+\cdots\cdots+2\cdot3^{n-1}\qquad-(2n-1)\cdot3^n$

$=1+2(3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot3^n$

$=1+2\cdot\dfrac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot3^n$

$=1+3^n-3-(2n-1)\cdot3^n=(2-2n)\cdot3^n-2$

ゆえに　$S=(n-1)\cdot3^n+1$

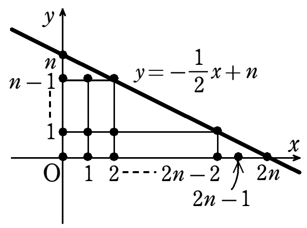
10 $xy$ 平面において，次の連立不等式の表す領域に含まれる格子点 ($x$ 座標，$y$ 座標がともに整数である点) の個数を求めよ。ただし，$n$ は自然数とする。

(1) $x\geqq0$，$y\geqq0$，$x+2y\leqq2n$　　(2) $x\geqq0$，$y\leqq n^2$，$y\geqq x^2$

解答　(1) $(n+1)^2$ 個　(2) $\dfrac{1}{6}(n+1)(4n^2-n+6)$ 個

解説

(1) 領域は，右図のように，$x$ 軸，$y$ 軸，直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+n$ で囲まれた三角形の周および内部である。




直線 $y=k$ $(k=n,\ n-1,\ \cdots\cdots,\ 0)$ 上には，それぞれ 1，3，5，……，$2n+1$ 個の格子点が並ぶ。

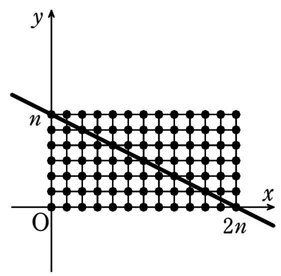
よって，格子点の総数は

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(2\cdot0+1)+\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=1+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$=(n+1)^2\ (\text{個})$$

別解　線分 $x+2y=2n$ $(0\leqq y\leqq n)$ 上の格子点 $(0,\ n)$，$(2,\ n-1)$，……，$(2n,\ 0)$ の個数は　$n+1$

4点 $(0,\ 0)$，$(2n,\ 0)$，$(2n,\ n)$，$(0,\ n)$ を頂点とする長方形の周および内部にある格子点の個数は

$(2n+1)(n+1)$



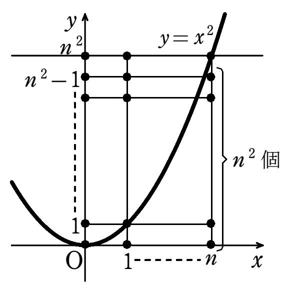

ゆえに，求める格子点の個数を $N$ とすると

$2N-(n+1)=(2n+1)(n+1)$

よって　$N=\dfrac{1}{2}\{(2n+1)(n+1)+(n+1)\}$

$=\dfrac{1}{2}(n+1)(2n+2)=(n+1)^2$ (個)

(2) 領域は，右図のように，$y$ 軸，直線 $y=n^2$，放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分である (境界線を含む)。




直線 $x=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1,\ n)$ 上には，それぞれ $n^2+1$，$(n^2+1)-1$，$(n^2+1)-4$，$(n^2+1)-9$，……，$(n^2+1)-n^2$ 個の格子点が並ぶ。

よって，格子点の総数は

$$\sum_{k=0}^{n}(n^2+1-k^2)$$
$$=(n^2+1-0^2)+\sum_{k=1}^{n}(n^2+1-k^2)$$
$$=(n^2+1)+(n^2+1)\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=(n^2+1)+(n^2+1)n-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{1}{6}(n+1)(4n^2-n+6)\ (\text{個})$$

11 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=2n}^{3n}(3k^2+5k-1)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}2\right)$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}3\cdot2^{i-1}\right)$

解答　(1) $(n+1)(19n^2+13n-1)$　(2) $n(n+1)$　(3) $3\cdot2^{n+1}-3n-6$

解説

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2+5k-1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$

$=3\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+5\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)-n$

$=\dfrac{1}{2}n(2n^2+3n+1+5n+5-2)=\dfrac{1}{2}n(2n^2+8n+4)$

$=n(n^2+4n+2)$

よって

$\displaystyle\sum_{k=2n}^{3n}(3k^2+5k-1)=\sum_{k=1}^{3n}(3k^2+5k-1)-\sum_{k=1}^{2n-1}(3k^2+5k-1)$

$=3n\{(3n)^2+4\cdot3n+2\}-(2n-1)\{(2n-1)^2+4(2n-1)+2\}$

$=3n(9n^2+12n+2)-(2n-1)(4n^2+4n-1)$

$=19n^3+32n^2+12n-1$

$=(n+1)(19n^2+13n-1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}2\right)=\sum_{k=1}^{n}2k=2\sum_{k=1}^{n}k=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=n(n+1)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}3\cdot2^{i-1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{3(2^k-1)}{2-1}=\sum_{k=1}^{n}(3\cdot2^k-3)=\sum_{k=1}^{n}3\cdot2^k-\sum_{k=1}^{n}3$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}6\cdot2^{k-1}-3\sum_{k=1}^{n}1=\frac{6(2^n-1)}{2-1}-3n$

$=3\cdot2^{n+1}-3n-6$