数学演習（等比数列･等比数列の和）Ｈ２４．１０．１１　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1. 次のような等比数列の初めの5項を求めよ。

(1) 初項3，公比2　　(2) 初項9，公比 $-\dfrac{1}{3}$

2. 次の等比数列の公比を求めよ。また，$\boxed{}$ に適する数を求めよ。

(1) 2，6，18，$\boxed{}$，$\boxed{}$，……　　(2) $\boxed{}$，2，$-2\sqrt{2}$，$\boxed{}$，……

3. 次のような等比数列の一般項を求めよ。また，第6項を求めよ。

(1) 初項7，公比2　　(2) 初項1，公比 $\dfrac{1}{4}$

(3) -3，3，-3，3，……　　(4) $\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{4}{9}$，$\dfrac{16}{27}$，……

4. 第5項が -48，第7項が -192 である等比数列の一般項を求めよ。

5. 初項が正である等比数列において，第8項が32，第10項が8である。この数列の初項と公比を求めよ。

6. 第2項が $-\dfrac{1}{4}$，第6項が -4 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

7. 等比数列 $\{a_n\}$ について，$a_2+a_3=6$，$a_4+a_5=54$ である。このとき，数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ。

8. 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 初項1，公比3　　(2) 初項10，公比 -2

(3) 1，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，……　　(4) $\sqrt{2}$，$2+\sqrt{2}$，$4+3\sqrt{2}$，……

9. 次のような等比数列の和を求めよ。

(1)　初項 1，公比 2，末項 128　　(2)　初項 243，公比 $-\dfrac{1}{3}$，末項 3

10. 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。また，初項から第 10 項までの和 S_{10} を求めよ。

(1)　初項 7，公比 2　　(2)　初項 20，公比 -2

(3)　5，-5，5，-5，……　　(4)　4，2，1，$\dfrac{1}{2}$，……

11. 1 日目に 10 円，2 日目に 30 円，3 日目に 90 円，…… というように，前の日の 3 倍の金額を貯金箱に入れていくと，1 週間でいくら貯金することができるか。

12. 次の等比数列で，指定されたものを求めよ。

(1)　初項が 5，公比が 2，初項から第 n 項までの和が 315 のとき　n

(2)　公比が 2，初項から第 10 項までの和が -1023 のとき　初項 a

(3)　初項が 1，公比が 2，初項から第 n 項までの和が 31 のとき　n

13. 公比が負である等比数列において，初項から第 3 項までの和が 9，第 3 項から第 5 項までの和が 36 である。この数列の一般項を求めよ。

14. 第 3 項が 6，初項から第 3 項までの和が 78 である等比数列の一般項を求めよ。

1．次のような等比数列の初めの5項を求めよ。

(1) 初項3，公比2　　(2) 初項9，公比 $-\frac{1}{3}$

解答　(1)　3，6，12，24，48　　(2)　9，-3，1，$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$

与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。

(1) $a_1=3$，$a_2=2a_1=2\times3=6$，$a_3=2a_2=2\times6=12$，
$a_4=2a_3=2\times12=24$，$a_5=2a_4=2\times24=48$

(2) $a_1=9$，$a_2=-\frac{1}{3}a_1=-\frac{1}{3}\times9=-3$，

$a_3=-\frac{1}{3}a_2=-\frac{1}{3}\times(-3)=1$，$a_4=-\frac{1}{3}a_3=-\frac{1}{3}\times1=-\frac{1}{3}$，

$a_5=-\frac{1}{3}a_4=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}$

2．次の等比数列の公比を求めよ。また，$\boxed{\quad}$ に適する数を求めよ。

(1) 2，6，18，$\boxed{\quad}$，$\boxed{\quad}$，……　　(2) $\boxed{\quad}$，2，$-2\sqrt{2}$，$\boxed{\quad}$，……

解答　(1)　公比3，$\boxed{\quad}$ に適する数：54，162

(2)　公比 $-\sqrt{2}$，$\boxed{\quad}$ に適する数：$-\sqrt{2}$，4

与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。

(1) 公比は　$\frac{6}{2}=3$

よって　$a_4=18\times3=54$，　$a_5=54\times3=162$

(2) 公比は　$\frac{-2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

よって　$a_1=\frac{2}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$，　$a_4=-2\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=4$

3．次のような等比数列の一般項を求めよ。また，第6項を求めよ。

(1) 初項7，公比2　　(2) 初項1，公比 $\frac{1}{4}$

(3) -3，3，-3，3，……　　(4) $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{4}{9}$，$\frac{16}{27}$，……

解答　一般項，第6項の順に　(1)　$7\cdot2^{n-1}$，224　　(2)　$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$，$\frac{1}{1024}$

(3)　$-3(-1)^{n-1}$，3　　(4)　$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$，$\frac{256}{243}$

与えられた数列の一般項を a_n とする。

(1) $a_n=7\cdot2^{n-1}$　　よって　$a_6=7\cdot2^{6-1}=7\cdot2^5=224$

(2) $a_n=1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$　　よって　$a_6=\left(\frac{1}{4}\right)^{6-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{1024}$

(3) 公比は $-3\times r=3$　より　$r=\frac{3}{-3}=-1$ であるから　$a_n=-3(-1)^{n-1}$

よって　$a_6=-3(-1)^5=3$

(4) 公比は $\frac{1}{3}\div\frac{1}{4}=\frac{4}{3}$ であるから　$a_n=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

よって　$a_6=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^5=\frac{256}{243}$

4．第5項が -48，第7項が -192 である等比数列の一般項を求めよ。

解答　$-3\cdot2^{n-1}$ または $-3(-2)^{n-1}$

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その初項を a，公比を r とする。

$a_5=-48$ であるから　$ar^4=-48$　……①

$a_7=-192$ であるから　$ar^6=-192$　……②

② から　$ar^4\cdot r^2=-192$　① を代入して　$-48r^2=-192$

よって　$r^2=4$　したがって　$r=\pm2$

① から　$r=2$ のとき　$a=-3$　　$r=-2$ のとき　$a=-3$

よって，求める一般項は　$-3\cdot2^{n-1}$ または $-3(-2)^{n-1}$

5．初項が正である等比数列において，第8項が32，第10項が8である。この数列の初項と公比を求めよ。

解答　初項4096，公比 $\frac{1}{2}$

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その初項を a，公比を r とする。

$a_8=32$ であるから　$ar^7=32$　……①

$a_{10}=8$ であるから　$ar^9=8$　……②

② から　$ar^7\cdot r^2=8$　① を代入して　$32r^2=8$

よって　$r^2=\frac{1}{4}$　したがって　$r=\pm\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$ のとき，① から　$a\left(\frac{1}{2}\right)^7=32$　よって　$a=4096$

このとき，題意を満たす。

$r=-\frac{1}{2}$ のとき，① から　$a\left(-\frac{1}{2}\right)^7=32$　よって　$a=-4096$

このとき，題意を満たさず，不適。

以上から　初項は4096，公比は $\frac{1}{2}$

6．第2項が $-\frac{1}{4}$，第6項が -4 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解答　$a_n=-\frac{1}{8}\cdot2^{n-1}$ または $a_n=\frac{1}{8}\cdot(-2)^{n-1}$

初項を a，公比を r とする。

$a_2=-\frac{1}{4}$ であるから　$ar=-\frac{1}{4}$　……①

$a_6=-4$ であるから　$ar^5=-4$　……②

①，② から　$r^4=16$　　よって　$r^4-16=0$

ゆえに　$(r+2)(r-2)(r^2+4)=0$

r は実数であるから　$r=2$，-2

① から　$r=2$ のとき　$a=-\frac{1}{8}$　　$r=-2$ のとき　$a=\frac{1}{8}$

したがって　$a_n=-\frac{1}{8}\cdot2^{n-1}$ または $a_n=\frac{1}{8}\cdot(-2)^{n-1}$

7．等比数列 $\{a_n\}$ について，$a_2+a_3=6$，$a_4+a_5=54$ である。このとき，数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ。

解答　初項 $\frac{1}{2}$，公比3 または 初項1，公比 -3

初項を a，公比を r とする。

$a_2+a_3=6$ であるから　$ar+ar^2=6$　……①

$a_4+a_5=54$ であるから　$ar^3+ar^4=54$　……②

② から　$(ar+ar^2)r^2=54$　① を代入して　$6r^2=54$

よって，$r^2=9$ から　$r=\pm3$

① から　$r=3$ のとき　$3a+9a=6$　ゆえに　$a=\frac{1}{2}$

$r=-3$ のとき　$-3a+9a=6$　ゆえに　$a=1$

したがって　初項 $\frac{1}{2}$，公比3 または 初項1，公比 -3

8．次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 初項1，公比3　　(2) 初項10，公比 -2

(3) 1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，……　　(4) $\sqrt{2}$，$2+\sqrt{2}$，$4+3\sqrt{2}$，……

解答　(1)　$S_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$　　(2)　$S_n=\frac{10}{3}\{1-(-2)^n\}$　　(3)　$S_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

(4)　$S_n=(\sqrt{2}+1)^n-1$

(1) $S_n=\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)$

(2) $S_n=\frac{10\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{10}{3}\{1-(-2)^n\}$

(3) 初項は1，公比は $-\frac{1}{2}$ であるから

$$S_n=\frac{1\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\div\frac{3}{2}=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

(4) 初項は $\sqrt{2}$，公比 r は　$\sqrt{2}\times r=2+\sqrt{2}$　より　$r=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$ であるから

$$S_n=\frac{\sqrt{2}\{(\sqrt{2}+1)^n-1\}}{(\sqrt{2}+1)-1}=(\sqrt{2}+1)^n-1$$

9．次のような等比数列の和を求めよ。

(1)　初項 1，公比 2，末項 128　　　　(2)　初項 243，公比 $-\frac{1}{3}$，末項 3

解答　(1)　255　　(2)　183

(1)　項数を n とすると　$1\cdot2^{n-1}=128$　　よって　$2^{n-1}=2^7$

ゆえに　$n-1=7$　　よって　$n=8$

したがって，求める和は　$\frac{1\cdot(2^8-1)}{2-1}=255$

(2)　項数を n とすると　$243\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=3$　　よって　$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{81}$

ゆえに　$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^4$　　よって，$n-1=4$ から　$n=5$

したがって，求める和は　$\frac{243\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^5\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}\cdot243\left(1+\frac{1}{243}\right)=183$

10. 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。また，初項から第 10 項までの和 S_{10} を求めよ。

(1)　初項 7，公比 2　　　　(2)　初項 20，公比 -2

(3)　5，-5，5，-5，……　　　　(4)　4，2，1，$\frac{1}{2}$，……

解答　(1)　$S_n=7(2^n-1)$，$S_{10}=7161$　　(2)　$S_n=\frac{20}{3}\{1-(-2)^n\}$，$S_{10}=-6820$

(3)　$S_n=\frac{5}{2}\{1-(-1)^n\}$，$S_{10}=0$　　(4)　$S_n=8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$，$S_{10}=\frac{1023}{128}$

(1)　$S_n=\frac{7(2^n-1)}{2-1}=7(2^n-1)$，　$S_{10}=7(2^{10}-1)=7161$

(2)　$S_n=\frac{20\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{20}{3}\{1-(-2)^n\}$，　$S_{10}=\frac{20}{3}\{1-(-2)^{10}\}=-6820$

(3)　初項 5，公比 -1 の等比数列であるから

$$S_n=\frac{5\{1-(-1)^n\}}{1-(-1)}=\frac{5}{2}\{1-(-1)^n\},\quad S_{10}=\frac{5}{2}\{1-(-1)^{10}\}=0$$

(4)　初項 4，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$S_n=\frac{4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\},\quad S_{10}=8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}=\frac{1023}{128}$$

11. 1 日目に 10 円，2 日目に 30 円，3 日目に 90 円，…… というように，前の日の 3 倍の金額を貯金箱に入れていくと，1 週間でいくら貯金することができるか。

解答　10930 円

1 日目に 10 円，2 日目に $10\cdot3$ 円，3 日目に $10\cdot3^2$ 円，……，7 日目に $10\cdot3^6$ 円を貯金箱に入れるから

$$10+10\cdot3+10\cdot3^2+\cdots\cdots+10\cdot3^6=\frac{10(3^7-1)}{3-1}$$
$$=10930\text{(円)}$$

12. 次の等比数列で，指定されたものを求めよ。

(1)　初項が 5，公比が 2，初項から第 n 項までの和が 315 のとき　n

(2)　公比が 2，初項から第 10 項までの和が -1023 のとき　初項 a

(3)　初項が 1，公比が 2，初項から第 n 項までの和が 31 のとき　n

解答　(1)　$n=6$　　(2)　$a=-1$　　(3)　$n=5$

(1)　$\frac{5(2^n-1)}{2-1}=315$ から　$2^n-1=63$

よって　$2^n=64$　　すなわち　$2^n=2^6$　　したがって　$n=6$

(2)　$\frac{a(2^{10}-1)}{2-1}=-1023$ から　$1023a=-1023$　　よって　$a=-1$

(3)　$\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=31$ から　$2^n-1=31$

よって　$2^n=32$　　すなわち　$2^n=2^5$　　したがって　$n=5$

13. 公比が負である等比数列において，初項から第 3 項までの和が 9，第 3 項から第 5 項までの和が 36 である。この数列の一般項を求めよ。

解答　$3(-2)^{n-1}$

初項を a，公比を r とすると，条件から

$a+ar+ar^2=9$　　……①

$ar^2+ar^3+ar^4=36$　……②

② から　$r^2(a+ar+ar^2)=36$

① を代入して　$9r^2=36$　　よって　$r^2=4$

問題文より $r<0$ であるから　$r=-2$

$r=-2$ を ① に代入すると　$a-2a+4a=9$

よって　$a=3$

したがって，求める一般項は　$3(-2)^{n-1}$

14. 第 3 項が 6，初項から第 3 項までの和が 78 である等比数列の一般項を求めよ。

解答　$54\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ または $96\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

初項を a，公比を r とすると，条件から

$ar^2=6$　　……①

$a+ar+ar^2=78$　……②

② から　$a(1+r+r^2)=78$

両辺に r^2 をかけて　$ar^2(1+r+r^2)=78r^2$

① を代入して　$6(1+r+r^2)=78r^2$

よって　$12r^2-r-1=0$　　ゆえに，$(3r-1)(4r+1)=0$ から　$r=\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{4}$

① から　$r=\frac{1}{3}$ のとき　$a=54$　　$r=-\frac{1}{4}$ のとき　$a=96$

したがって，求める一般項は

$54\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ または $96\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$