数学演習（数列）Ｈ２３．２．２８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1．第3項が10，第6項が22である等差数列の初項は ア $\boxed{}$ ，公差は イ $\boxed{}$ である。

また，第30項は ウ $\boxed{}$ ，50は第 エ $\boxed{}$ 項である。

2．次の等差数列の和を求めよ。

(1)　2，5，8，……，50

(2)　90，84，78，……，0

3．1から100までの整数について，次の和を求めよ。

(1)　4の倍数の和

(2)　4の倍数でない数の和

4．ある等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_{10}=100$，$S_{20}=400$ であるとき，この数列の初項と公差を求めよ。

5．初項が 70，公差が -4 である等差数列において

(1)　第何項が初めて負になるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

6．第 5 項が -48，第 7 項が -192 である等比数列の一般項を求めよ。

7．数列 24，a，b が等差数列をなし，数列 a，b，8 が等比数列をなすという。このとき，a，b の値を求めよ。

8．次のような等比数列の和を求めよ。

(1)　初項 1，公比 2，末項 128

(2)　初項 243，公比 $-\dfrac{1}{3}$，末項 3

9．公比が負である等比数列において，初項から第 3 項までの和が 9，第 3 項から第 5 項までの和が 36 である。この数列の一般項を求めよ。

10. 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{15} k^2$　(2) $\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$　(3) $\sum_{i=1}^{n}(20-3i)$

(4) $\sum_{k=1}^{n}(6k^2+1)$　(5) $\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$

(6) $\sum_{k=1}^{n}4\cdot 2^{k-1}$　(7) $\sum_{k=1}^{n}(-3)^k$

11. 次の和を求めよ。

(1) $3+8+13+\cdots\cdots+(5n-2)$　(2) $2^2+4^2+6^2+\cdots\cdots+(2n)^2$

(3) $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots\cdots+n(2n-1)$

12. (1) 和 $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k-2)$ を求めよ。

(2) 和 $1\cdot 1\cdot 3+2\cdot 3\cdot 5+3\cdot 5\cdot 7+\cdots\cdots+n(2n-1)(2n+1)$ を求めよ。

13. 次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $2,\ 2+5,\ 2+5+8,\ 2+5+8+11,\ \cdots\cdots$

(2) $1\cdot(2n-1),\ 3(2n-3),\ 5(2n-5),\ \cdots\cdots,\ (2n-3)\cdot 3,\ (2n-1)\cdot 1$

14. 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}$ を求めよ。

15. 次の数列の一般項 a_n を求めよ。

(1) $10,\ 8,\ 4,\ -2,\ -10,\ \cdots\cdots$

(2) $1,\ 2,\ 6,\ 15,\ 31,\ \cdots\cdots$

(3) $0,\ -3,\ 6,\ -21,\ 60,\ \cdots\cdots$

16. 初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n=n^2-4n$　　(2)　$S_n=n^3$　　(3)　$S_n=2^n-1$

17. 次の和を求めよ。　$\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$

18. 次の和 S を求めよ。　$S=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots\cdots+n\cdot2^{n-1}$

19. 一般項が $2n\cdot 3^{n-1}$ で表される数列の初項から第 n 項までの和

$$S=2\cdot1+4\cdot3+6\cdot3^2+\cdots\cdots+2n\cdot3^{n-1}$$

を求めよ。

20. 次の和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\dfrac{1}{10\cdot13}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

(3) $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+n}$

1．第 3 項が 10，第 6 項が 22 である等差数列の初項は $^{ア}\boxed{}$，公差は $^{イ}\boxed{}$ である。

また，第 30 項は $^{ウ}\boxed{}$，50 は第 $^{エ}\boxed{}$ 項である。

解答　（ア）2　（イ）4　（ウ）118　（エ）13

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その初項を a，公差を d とする。

$a_3=10$ であるから　$a+2d=10$　……①

$a_6=22$ であるから　$a+5d=22$　……②

①，② を解いて　$a=2$，$d=4$

よって，初項は $^{ア}2$，公差は $^{イ}4$ である。

また，一般項 a_n は　$a_n=2+(n-1)\times 4=4n-2$

したがって　$a_{30}=4\cdot 30-2={}^{ウ}118$

更に，$a_n=50$ とすると　$4n-2=50$　よって　$n=13$

したがって，50 は 第 $^{エ}13$ 項 である。

2．次の等差数列の和を求めよ。

(1)　2，5，8，……，50　　(2)　90，84，78，……，0

解答　(1)　442　(2)　720

(1)　初項は 2，公差は 3 であるから，項数を n とすると

$2+(n-1)\cdot 3=50$　よって　$n=17$

したがって，求める和は　$\dfrac{1}{2}\cdot 17(2+50)=442$

(2)　初項は 90，公差は -6 であるから，項数を n とすると

$90+(n-1)\cdot(-6)=0$　よって　$n=16$

したがって，求める和は　$\dfrac{1}{2}\cdot 16(90+0)=720$

3．1 から 100 までの整数について，次の和を求めよ。

(1)　4 の倍数の和　　(2)　4 の倍数でない数の和

解答　(1)　1300　(2)　3750

(1)　求める和は

$$4+8+12+\cdots\cdots+100=4(1+2+3+\cdots\cdots+25)$$
$$=4\times\frac{1}{2}\cdot 25(25+1)$$
$$=1300$$

(2)　求める和は

$$1+2+3+\cdots\cdots+100-(4+8+12+\cdots\cdots+100)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 100(100+1)-1300=5050-1300$$
$$=3750$$

4．ある等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_{10}=100$，$S_{20}=400$ であるとき，この数列の初項と公差を求めよ。

解答　初項 1，公差 2

初項を a，公差を d とする。

$S_{10}=100$ であるから　$\dfrac{1}{2}\cdot 10(2a+9d)=100$　よって　$2a+9d=20$　……①

$S_{20}=400$ であるから　$\dfrac{1}{2}\cdot 20(2a+19d)=400$　よって　$2a+19d=40$　……②

①，② を解いて　$a=1$，$d=2$

したがって　初項は 1，公差は 2

5．初項が 70，公差が -4 である等差数列において

(1)　第何項が初めて負になるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

解答　(1)　第 19 項　(2)　第 18 項，和 648

一般項を a_n とすると　$a_n=70+(n-1)\times(-4)=74-4n$

(1)　$a_n<0$ とすると　$74-4n<0$　よって　$n>\dfrac{37}{2}=18.5$　……①

① を満たす最小の自然数 n は　$n=19$

したがって，第 19 項が初めて負になる。

(2)　(1) の結果から　$a_1>0$，$a_2>0$，……，$a_{18}>0$，$a_{19}<0$，$a_{20}<0$，……

よって，初項から第 18 項までの和が最大となる。

また，そのときの和は　$\dfrac{1}{2}\cdot 18\{2\cdot 70+(18-1)\cdot(-4)\}=648$

6．第 5 項が -48，第 7 項が -192 である等比数列の一般項を求めよ。

解答　$-3\cdot 2^{n-1}$ または $-3(-2)^{n-1}$

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その初項を a，公比を r とする。

$a_5=-48$ であるから　$ar^4=-48$　……①

$a_7=-192$ であるから　$ar^6=-192$　……②

② から　$ar^4\cdot r^2=-192$　① を代入して　$-48r^2=-192$

よって　$r^2=4$　したがって　$r=\pm 2$

① から　$r=2$ のとき　$a=-3$　$r=-2$ のとき　$a=-3$

よって，求める一般項は　$-3\cdot 2^{n-1}$ または $-3(-2)^{n-1}$

7．数列 24，a，b が等差数列をなし，数列 a，b，8 が等比数列をなすという。このとき，a，b の値を求めよ。

解答　$(a,\ b)=(8,\ -8)$，$(18,\ 12)$

数列 24，a，b が等差数列をなすから　$2a=24+b$　……①

数列 a，b，8 が等比数列をなすから　$b^2=a\times 8$

よって　$b^2=4\cdot 2a$

① を代入すると　$b^2=4(24+b)$　整理すると　$b^2-4b-96=0$

ゆえに　$(b+8)(b-12)=0$　したがって　$b=-8,\ 12$

① から　$b=-8$ のとき　$a=8$，　$b=12$ のとき　$a=18$

すなわち　$(a,\ b)=(8,\ -8)$，$(18,\ 12)$

8．次のような等比数列の和を求めよ。

(1)　初項 1，公比 2，末項 128　　(2)　初項 243，公比 $-\dfrac{1}{3}$，末項 3

解答　(1)　255　(2)　183

(1)　項数を n とすると　$1\cdot 2^{n-1}=128$　よって　$2^{n-1}=2^7$

ゆえに　$n-1=7$　よって　$n=8$

したがって，求める和は　$\dfrac{1\cdot(2^8-1)}{2-1}=255$

(2)　項数を n とすると　$243\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=3$　よって　$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{81}$

ゆえに　$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^4$　よって，$n-1=4$ から　$n=5$

したがって，求める和は　$\dfrac{243\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^5\right\}}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\dfrac{3}{4}\cdot 243\left(1+\dfrac{1}{243}\right)=183$

別解　初項 a，公比 r の等比数列の第 n 項を l とすると，初項から第 n 項までの和は

$\dfrac{a-rl}{1-r}$

これを用いると　(1)　$\dfrac{1-2\cdot 128}{1-2}=255$　(2)　$\dfrac{243-\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot 3}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\dfrac{3}{4}\cdot 244=183$

9．公比が負である等比数列において，初項から第 3 項までの和が 9，第 3 項から第 5 項までの和が 36 である。この数列の一般項を求めよ。

解答　$3(-2)^{n-1}$

初項を a，公比を r とすると，条件から

$a+ar+ar^2=9$　……①

$ar^2+ar^3+ar^4=36$　……②

② から　$r^2(a+ar+ar^2)=36$

① を代入して　$9r^2=36$　よって　$r^2=4$

$r<0$ であるから　$r=-2$

$r=-2$ を ① に代入すると　$a-2a+4a=9$

よって　$a=3$

したがって，求める一般項は　$3(-2)^{n-1}$

10．次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{15}k^2$　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$　　(3)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(20-3i)$

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k^2+1)$　　(5)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$

(6)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}4\cdot 2^{k-1}$　　(7)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-3)^k$

解答　(1)　1240　(2)　$n(n+4)$　(3)　$-\dfrac{1}{2}n(3n-37)$　(4)　$n(2n^2+3n+2)$

(5)　$\dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$　(6)　$2^{n+2}-4$　(7)　$\dfrac{3}{4}\{(-3)^n-1\}$

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{15}k^2=\frac{1}{6}\cdot 15(15+1)(2\cdot 15+1)=1240$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=2\sum_{k=1}^{n}k+3\sum_{k=1}^{n}1=2\times\frac{1}{2}n(n+1)+3\times n$

$=n^2+4n=n(n+4)$

(3) $\sum_{i=1}^{n}(20-3i)=20\sum_{i=1}^{n}1-3\sum_{i=1}^{n}i=20\times n-3\times\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{2}n\{40-3(n+1)\}=-\frac{1}{2}n(3n-37)$$

(4) $\sum_{k=1}^{n}(6k^2+1)=6\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}1=6\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n$

$$=n\{(n+1)(2n+1)+1\}=n(2n^2+3n+2)$$

(5) $\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-6k+5)=\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+5\sum_{k=1}^{n}1$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\times\frac{1}{2}n(n+1)+5\times n$$

$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-18(n+1)+30\}$$

$$=\frac{1}{6}n(2n^2-15n+13)=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$$

(6) $\sum_{k=1}^{n}4\cdot 2^{k-1}=4\cdot 1+4\cdot 2^1+4\cdot 2^2+\cdots\cdots+4\cdot 2^{n-1}$

これは初項 4，公比 2，項数 n の等比数列の和であるから

$$\sum_{k=1}^{n}4\cdot 2^{k-1}=\frac{4(2^n-1)}{2-1}=4(2^n-1)=2^{n+2}-4$$

(7) $\sum_{k=1}^{n}(-3)^k=(-3)+(-3)^2+(-3)^3+\cdots\cdots+(-3)^n$

これは初項 -3，公比 -3，項数 n の等比数列の和であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(-3)^k=\frac{-3\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=\frac{3}{4}\{(-3)^n-1\}$$

注意 $\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1}$ は初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和である。

11. 次の和を求めよ。

(1) $3+8+13+\cdots\cdots+(5n-2)$　　(2) $2^2+4^2+6^2+\cdots\cdots+(2n)^2$

(3) $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots\cdots+n(2n-1)$

解答　(1) $\frac{1}{2}n(5n+1)$　(2) $\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$　(3) $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

(1) これは，第 k 項が $5k-2$ である数列の初項から第 n 項までの和である。
よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}(5k-2)=5\sum_{k=1}^{n}k-2\sum_{k=1}^{n}1=5\times\frac{1}{2}n(n+1)-2\times n$$

$$=\frac{1}{2}n\{5(n+1)-4\}=\frac{1}{2}n(5n+1)$$

(2) これは，第 k 項が $(2k)^2$ である数列の初項から第 n 項までの和である。
よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=4\sum_{k=1}^{n}k^2=4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

(3) これは，第 k 項が $k(2k-1)$ である数列の初項から第 n 項までの和である。
よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k=2\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

12. (1) 和 $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k-2)$ を求めよ。

(2) 和 $1\cdot 1\cdot 3+2\cdot 3\cdot 5+3\cdot 5\cdot 7+\cdots\cdots+n(2n-1)(2n+1)$ を求めよ。

解答　(1) $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n-7)$　(2) $\frac{1}{2}n(n+1)(2n^2+2n-1)$

(1) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k-2)=\sum_{k=1}^{n}(k^3-k^2-2k)=\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)-12\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2-n-14)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n-7)$$

(2) これは，第 k 項が $k(2k-1)(2k+1)$ である数列の初項から第 n 項までの和である。
よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}(4k^3-k)=4\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=4\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\{2n(n+1)-1\}$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n^2+2n-1)$$

13. 次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) 2，$2+5$，$2+5+8$，$2+5+8+11$，……

(2) $1\cdot(2n-1)$，$3(2n-3)$，$5(2n-5)$，……，$(2n-3)\cdot 3$，$(2n-1)\cdot 1$

解答　第 k 項，和の順に

(1) $\frac{1}{2}k(3k+1)$，$\frac{1}{2}n(n+1)^2$　(2) $(2k-1)(2n-2k+1)$，$\frac{1}{3}n(2n^2+1)$

第 k 項を a_k，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) $a_k=2+5+8+\cdots\cdots+(3k-1)$

これは，初項 2，公差 3 の等差数列の初項から第 k 項までの和であるから

$$a_k=\frac{1}{2}k\{2\cdot 2+(k-1)\cdot 3\}=\frac{1}{2}k(3k+1)$$

また　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}(3k^2+k)\right\}=\frac{1}{2}\left\{3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)+1\}$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)^2$$

(2) $a_k=(2k-1)\{2n-(2k-1)\}=(2k-1)(2n-2k+1)$　$[1\leqq k\leqq n]$

また　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-4k^2+4(n+1)k-(2n+1)\}$

$$=-4\sum_{k=1}^{n}k^2+4(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-(2n+1)\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=-4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-(2n+1)n$$

$$=\frac{1}{3}n\{-2(2n^2+3n+1)+6(n^2+2n+1)-3(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{3}n(2n^2+1)$$

14. 和 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}$ を求めよ。

解答　$\sqrt{n+3}-\sqrt{3}$

$$\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})}$$

$$=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(k+2)-(k+3)}=-(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})$$

よって　$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}=\sum_{k=1}^{n}\{-(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})\}$

$$=-\{(\sqrt{3}-\sqrt{4})+(\sqrt{4}-\sqrt{5})+(\sqrt{5}-\sqrt{6})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3})\}$$

$$=\sqrt{n+3}-\sqrt{3}$$

15. 次の数列の一般項 a_n を求めよ。

(1) 10，8，4，-2，-10，……　　(2) 1，2，6，15，31，……

(3) 0，-3，6，-21，60，……

解答　(1) $a_n=-n^2+n+10$　(2) $a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$

(3) $a_n=\frac{3}{4}\{(-3)^{n-1}-1\}$

(1) この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

-2，-4，-6，-8，……

よって　$b_n=-2n$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=10+\sum_{k=1}^{n-1}(-2k)=10-2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=-n^2+n+10$$

初項は $a_1=10$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=-n^2+n+10$

(2) この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は　1，4，9，16，……

よって　$b_n=n^2$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2=1+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)\cdots\cdots ①$$

初項は $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$

(3) この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は　-3，9，-27，81，……

よって　$b_n=(-3)^n$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}(-3)^k=\frac{-3\{1-(-3)^{n-1}\}}{1-(-3)}=\frac{3}{4}\{(-3)^{n-1}-1\}$

初項は $a_1=0$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{3}{4}\{(-3)^{n-1}-1\}$

16. 初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n=n^2-4n$　　(2) $S_n=n^3$　　(3) $S_n=2^n-1$

解答　(1) $a_n=2n-5$　(2) $a_n=3n^2-3n+1$　(3) $a_n=2^{n-1}$

(1) $n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-4n)-\{(n-1)^2-4(n-1)\}$

$$=2n-5$$

初項は　$a_1=S_1=1^2-4\cdot1=-3$

よって，$a_n=2n-5$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=2n-5$

(2)　$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=n^3-(n-1)^3$

$=3n^2-3n+1$

初項は　$a_1=S_1=1^3=1$

よって，$a_n=3n^2-3n+1$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=3n^2-3n+1$

(3)　$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)$

$=2\cdot2^{n-1}-2^{n-1}=2^{n-1}$

初項は　$a_1=S_1=2^1-1=1$

よって，$a_n=2^{n-1}$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=2^{n-1}$

17. 次の和を求めよ。　$\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$

解答　$\dfrac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

求める和は２つおきに相殺されるので

$$\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2)-2(n+2)-2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

18. 次の和 S を求めよ。　$S=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots\cdots+n\cdot2^{n-1}$

解答　$S=2^n(n-1)+1$

$$S=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots\cdots+n\cdot2^{n-1}$$

$$2S=\quad 1\cdot2+2\cdot2^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n$$

辺々引くと

$$-S=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}-n\cdot2^n=\frac{2^n-1}{2-1}-2^nn=2^n(1-n)-1$$

よって　$S=2^n(n-1)+1$

19. 一般項が $2n\cdot3^{n-1}$ で表される数列の初項から第 n 項までの和

$$S=2\cdot1+4\cdot3+6\cdot3^2+\cdots\cdots+2n\cdot3^{n-1}$$

を求めよ。

解答　$S=\dfrac{1}{2}\{(2n-1)\cdot3^n+1\}$

$$S=2\cdot1+4\cdot3+6\cdot3^2+\cdots\cdots+2n\cdot3^{n-1}$$

両辺に 3 を掛けると

$$3S=\quad 2\cdot3+4\cdot3^2+\cdots\cdots+2(n-1)\cdot3^{n-1}+2n\cdot3^n$$

辺々引くと

$$S-3S=2\cdot1+2\cdot3+2\cdot3^2+\cdots\cdots+2\cdot3^{n-1}-2n\cdot3^n$$

$$=2(1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-1})-2n\cdot3^n$$

$$=2\cdot\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}-2n\cdot3^n$$

$$=(1-2n)\cdot3^n-1$$

ゆえに，$-2S=(1-2n)\cdot3^n-1$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\{(2n-1)\cdot3^n+1\}$$

20. 次の和を求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\dfrac{1}{10\cdot13}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(2)　$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

(3)　$1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+n}$

解答　(1)　$\dfrac{n}{3n+1}$　(2)　$\sqrt{n+1}-1$　(3)　$\dfrac{2n}{n+1}$

(1)　(与式)$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}\right)$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{13}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}$$

(2)　各項の分母を有理化すると

(与式)$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$

(3)　第 k 項は　$\dfrac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+k}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}k(k+1)}=\dfrac{2}{k(k+1)}$

よって

(与式)$=\dfrac{2}{1\cdot2}+\dfrac{2}{2\cdot3}+\dfrac{2}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\dfrac{2}{n(n+1)}$

$$=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$$