

1 次の数列の一般項 a_n と $\sum_{k=1}^n a_k$ を計算せよ。

(1) 等差数列で第 3 項が 16、第 9 項が 34 である

2 次の数列の一般項 a_n を求めよ。

(1) 1, 2, 4, 7, 11, 16, ……

3 次の数列の第 n 項 a_n と、初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 1, 1 + 3, 1 + 3 + 5, 1 + 3 + 5 + 7, ……

(2) 第 2 項が 6、第 5 項が 48、公比が実数である等比数列

(2) 3, 4, 7, 16, 43, 124, ……

(2) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, ……

4 初項 196 公差 -8 の等差数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの和を S_n とする。 S_n が最大となる項数 n を求め、そのときの和 S_n を求めよ。

6 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。
(1) $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

7 次の設問に答えよ。
(1) $\sum_{k=1}^n (2k-1)3^{k-1}$ を計算せよ。

5 1 から 200 までの自然数のうち 6 の倍数の和を求めよ。

(2) $1 \cdot 2n + 2 \cdot (2n-1) + 3 \cdot (2n-2) + 4 \cdot (2n-3) + \cdots + n \cdot (n+1)$

(2) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^2 - 3n$ のとき、一般項 a_n を求めよ。

1 次の数列の一般項 a_n と $\sum_{k=1}^n a_k$ を計算せよ。

(1) 等差数列で第 3 項が 16、第 9 項が 34 である

初項を a 、公差を d とすると

$$a_3 = 16, a_9 = 34 \text{ である}$$

$$\begin{cases} a_3 = a + 2d = 16 \cdots (I) \\ a_9 = a + 8d = 34 \cdots (II) \end{cases}$$

(I)(II) より

$$a = 10, d = 3$$

よって一般項 a_n は

$$a_n = 10 + (n-1) \cdot 3$$

$$= 3n + 7$$

$$\text{--- (4)}$$

また、

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (3k + 7)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 7$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 7n$$

$$= \frac{3}{2} n(n+1) + 7n$$

$$= \frac{1}{2} n \{ 3(n+1) + 14 \}$$

$$= \frac{1}{2} n (3n + 17)$$

$$\text{--- (4)}$$

(2) 第 2 項が 6、第 5 項が 48、公比が実数である等比数列

初項を a 、公比を r とすると

$$a_2 = 6, a_5 = 48 \text{ である}$$

$$\begin{cases} a_2 = ar = 6 \cdots (I) \\ a_5 = ar^4 = 48 \cdots (II) \end{cases}$$

(II) より

$$ar^4 = ar \cdot r^3 = 48$$

(I) を代入して

$$6r^3 = 48$$

$$r^3 = 8$$

r は実数より $r = 2$

$$(I) \text{ より } a = 3$$

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

また、

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$= 3(2^n - 1)$$

$$\text{--- (4)}$$

2 次の数列の一般項 a_n を求めよ。

(1) 1, 2, 4, 7, 11, 16, ……

$$\underbrace{1} \quad \underbrace{2} \quad \underbrace{4} \quad \underbrace{7} \quad \underbrace{11} \quad \underbrace{16} \quad \cdots$$

数列 $\{a_n\}$ は階差数列は初項 1、公差 1 の

等差数列より一般項は $1 + (n-1) \cdot 1 = n$

よって $n \geq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 1 + \frac{1}{2} (n-1) \{ (n-1) + 1 \}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} (n-1)n$$

$$= 1 + \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n \cdots (*)$$

$\Rightarrow (*)$ に $n=1$ を代入すると成立する

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n + 1 \quad \text{--- (4)}$$

(2) 3, 4, 7, 16, 43, 124, ……

$$\underbrace{3} \quad \underbrace{4} \quad \underbrace{7} \quad \underbrace{16} \quad \underbrace{43} \quad \underbrace{124} \quad \cdots$$

数列 $\{a_n\}$ は階差数列は初項 1、公比 3 の

等比数列より一般項は $1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$

よって $n \geq 2$ のとき

$$a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} \quad \left(\begin{array}{l} \text{初項 1} \\ \text{公比 3} \\ \text{項数 } n-1 \end{array} \right)$$

$$= 3 + \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1}$$

$$= 3 + \frac{3^n - 1}{2}$$

$$= \frac{6 + 3^n - 1}{2} = \frac{3^n + 5}{2} \cdots (*)$$

$\Rightarrow (*)$ に $n=1$ を代入すると成立する

$$\therefore a_n = \frac{3^n + 5}{2} \quad \text{--- (4)}$$

3 次の数列の第 n 項 a_n と、初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, ……

$$\underbrace{1} \quad \underbrace{1+3} \quad \underbrace{1+3+5} \quad \underbrace{1+3+5+7} \quad \cdots$$

階差数列は、初項 3、公差 2 の

等差数列なので一般項は

$$3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$$

よって $n \geq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)$$

$$= 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1) \{ (n-1) + 1 \} + (n-1)$$

$$= 1 + (n-1) \cdot n + (n-1)$$

$$= 1 + n^2 - n + n - 1$$

$$= n^2 \cdots (*)$$

(*) に $n=1$ を代入すると成立する

よって

$$\therefore a_n = n^2 \quad \text{--- (4)}$$

また S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$= \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\text{--- (4)}$$

(2) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, ……

$$\underbrace{0.2} \quad \underbrace{0.22} \quad \underbrace{0.222} \quad \underbrace{0.2222} \quad \cdots$$

階差数列は、初項 0.02、公比 0.1 の

等比数列である。よって一般項は

$$0.02 \cdot (0.1)^{n-1} = \frac{2}{100} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1} = \frac{1}{50} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

よって $n \geq 2$ のとき

$$a_n = 0.2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{50} \left(\frac{1}{10} \right)^{k-1}$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{\frac{1}{50} \{ 1 - (\frac{1}{10})^n \}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{\frac{1}{50} \{ 1 - (\frac{1}{10})^n \}}{\frac{9}{10}}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{45} \{ 1 - (\frac{1}{10})^n \}$$

$$= \frac{1}{45} \{ 10 - (\frac{1}{10})^{n-1} \}$$

$$= \frac{10}{45} \left\{ 1 - \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1} \right\}$$

$$= \frac{2}{9} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right\} \cdots (*)$$

$$(*)$$
 に $n=1$ を代入すると成立する

$$\therefore a_n = \frac{2}{9} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right\} \quad \text{--- (4)}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{9} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{10} \right)^k \right\}$$

$$= \frac{2}{9} \left\{ \sum_{k=1}^n 1 - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{10} \right)^k \right\}$$

$$= \frac{2}{9} \left[n - \frac{\frac{1}{10} \{ 1 - (\frac{1}{10})^n \}}{1 - \frac{1}{10}} \right]$$

$$= \frac{2}{9} \left[n - \frac{1}{9} \{ 1 - (\frac{1}{10})^n \} \right]$$

$$= \frac{2}{9} n - \frac{2}{81} + \frac{2}{81} \left(\frac{1}{10} \right)^n \quad \text{--- (4)}$$

- 4 初項 196 公差 -8 の等差数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの和を S_n とする。 S_n が最大となる項数 n を求め、そのときの和 S_n を求めよ。

一般項 a_n は

$$a_n = 196 + (n-1)(-8)$$

$$= 196 - 8n + 8$$

$$= -8n + 204$$

$\therefore a_n > 0$ であるとき

$$-8n + 204 > 0$$

$$-8n > -204$$

$$\therefore n < \frac{204}{8} = 25.5$$

よて正であるものを足し

- 5 1 から 200 までの自然数のうち 6 の倍数の和を求めよ。

6 の倍数は

$$6, 12, 18, \dots$$

よて、初項 6、公差 6 の等差数列

$$\therefore \text{一般項は } 6 + (n-1) \cdot 6 = 6n$$

$\therefore$ 200 以下の 6 の倍数で

最大のものは

$$6n < 200$$

$$\therefore n < \frac{200}{6} = 33.3 \dots$$

よて 第 33 項の $6 \cdot 33 = 198$ である。

これは最初の 90 は等差数列

$$6, 12, 18, \dots, 198$$

の第 33 項の 90 である。

- 6 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$(1) \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore n=25 \quad (4) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{n+2-2}{2(n+2)}$$

$$= \frac{n}{2(n+2)}$$

$$\text{---} (8)$$

$$(2) 1 \cdot 2n + 2 \cdot (2n-1) + 3 \cdot (2n-2) + 4 \cdot (2n-3) + \dots + n \cdot (n+1)$$

この数列は $\bigcirc \times \triangle$ という形の項の和である。

$$\bigcirc: 1, 2, 3, 4, \dots$$

初項 1、公差 1 の等差数列より

$$k \text{ 番目は } 1 + (k-1) \cdot 1 = k$$

$$\triangle: 2n, 2n-1, 2n-2, 2n-3, \dots$$

初項 $2n$ 、公差 -1 の等差数列より

$$k \text{ 番目は } 2n + (k-1)(-1) = 2n - k + 1$$

$\therefore$ この数列の第 k 項は $k(2n - k + 1)$ (4)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k(2n - k + 1) \\ &= \sum_{k=1}^n (2nk - k^2 + k) \\ &= \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (2n+1)k\} \\ &= -\sum_{k=1}^n k^2 + (2n+1) \sum_{k=1}^n k \\ &= -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (2n+1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{3}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \{-1+3\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \cdot 2 = \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

- 7 次の設問に答えよ。

$$(1) \sum_{k=1}^n (2k-1)3^{k-1} \text{ を計算せよ。}$$

$$S = \sum_{k=1}^n (2k-1)3^{k-1} \quad 2k-1 < 2$$

$$(2n-1)3^{n-1} - (2n-3)3^{n-1}$$

$$= 3^{n-1} \{(2n-1) - (2n-3)\}$$

$$= 3^{n-1} \cdot 2$$

$$S = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + \dots + (2n-1) \cdot 3^{n-1}$$

$$-) 3S = \quad 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + (2n-3) \cdot 3^{n-1} + (2n-1) \cdot 3^n$$

$$-2S = 1 + 6 + 18 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1} - (2n-1) \cdot 3^n$$

初項 6、公差 3、項数 $n-1$ の等差数列の和

$$\therefore -2S = 1 + \frac{6(3^{n-1}-1)}{3-1} - (2n-1) \cdot 3^n = -2 + 3^n(2-2n)$$

$$= 1 + 3(3^{n-1}-1) - (2n-1) \cdot 3^n$$

$$= 1 + 3^n - 3 - (2n-1) \cdot 3^n$$

$$= -2 + 3^n \{1 - (2n-1)\}$$

$$(2) a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n^2 - 3n \text{ のとき、一般項 } a_n \text{ を求めよ。}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_n \text{ である。}$$

$$S_n = n^2 - 3n$$

よて $n \geq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 - 3n) - \{(n-1)^2 - 3(n-1)\}$$

$$= (n^2 - 3n) - (n^2 - 2n + 1 - 3n + 3)$$

$$= (n^2 - 3n) - (n^2 - 5n + 4)$$

$$= n^2 - 3n - n^2 + 5n - 4$$

$$= 2n - 4 \quad (*)$$

$$\text{また } a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \cdot 1$$

$$= 1 - 3 = -2$$

$$= 4 \text{ は } (*) \text{ に}$$

$$n=1 \text{ を代入}$$

$$(1) \text{ の } n=1 \text{ のとき}$$

$\therefore$

$$a_n = 2n - 4$$

$$\text{---} (8)$$