

1. 階差数列を利用して，次の数列の一般項 a_n を求めよ。

- (1) 1, 2, 7, 16, 29, ……
- (2) 2, 5, 14, 41, 122, ……

2. 次の数列の一般項 a_n を求めよ。

- (1) 10, 8, 4, −2, −10, ……
- (2) 1, 2, 6, 15, 31, ……
- (3) 0, −3, 6, −21, 60, ……

3. 次の数列の一般項と，初項から第 n 項までの和をそれぞれ求めよ。

- 0, 5, 16, 33, 56, ……

4. 初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

- (1) $S_n = n^2 - 4n$
- (2) $S_n = n^3$
- (3) $S_n = 2^n - 1$

5. 初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

- (1) $S_n = n^2 - 3n$
- (2) $S_n = n^3 + 1$
- (3) $S_n = 2^n - 3$

6. 奇数の数列 1, 3, 5, …… を

- (1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), ……

のように，順に 1 個, 2 個, 3 個, …… の群に分ける。

- (1) 第 n 番目の群の最初の奇数を n の式で表せ。
- (2) 第 20 番目の群に入る奇数の和を求めよ。

7. 偶数の数列 2, 4, 6, …… を次のように, 順に 1 個, 2 個, 3 個, …… の群に分ける。
- {2}, {4, 6}, {8, 10, 12}, {14, 16, 18, 20}, ……
- (1) 第 n 番目の群の最後の数を求めよ。
 - (2) 第 m 番目の群の最初の数を求めよ。
 - (3) 第 n 番目の群に入る偶数の和を求めよ。

8. 数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \dots$ について $\frac{13}{29}$ は第何項か。また, 第 244 項を求めよ。

9. 1 から順に自然数を並べて, 下のように 1 個, 2 個, 4 個, …… となるように群に分ける。ただし, 第 n 群が含む数の個数は 2^{n-1} 個である。
- $1 \mid 2, 3 \mid 4, 5, 6, 7 \mid 8, \dots$
- (1) 第 5 群の初めの数と終わりの数を求めよ。
 - (2) 第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。

1. 階差数列を利用して、次の数列の一般項 a_n を求めよ。

- (1) 1, 2, 7, 16, 29, …… (2) 2, 5, 14, 41, 122, ……

解答 (1) $a_n = 2n^2 - 5n + 4$ (2) $a_n = \frac{3^n + 1}{2}$

解説

- (1) この数列の階差数列は 1, 5, 9, 13, ……

これは初項が 1, 公差が 4 の等差数列であるから、その一般項を b_n とすると

$$b_n = 1 + (n - 1) \times 4 \quad \text{すなわち} \quad b_n = 4n - 3$$

よって、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 3) = 1 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 3 = 1 + 4 \times \frac{1}{2} (n - 1)n - 3(n - 1)$$

$$\text{すなわち} \quad a_n = 2n^2 - 5n + 4$$

初項は $a_1 = 1$ であるから、上の a_n は $n = 1$ のときにも成り立つ。

$$\text{したがって、一般項 } a_n \text{ は} \quad a_n = 2n^2 - 5n + 4$$

- (2) この数列の階差数列は 3, 9, 27, 81, ……

これは初項が 3, 公比が 3 の等比数列であるから、その一般項を b_n とすると

$$b_n = 3 \cdot 3^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad b_n = 3^n$$

よって、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 2 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1}$$

$$\text{すなわち} \quad a_n = \frac{3^n + 1}{2}$$

初項は $a_1 = 2$ であるから、上の a_n は $n = 1$ のときにも成り立つ。

$$\text{したがって、一般項 } a_n \text{ は} \quad a_n = \frac{3^n + 1}{2}$$

2. 次の数列の一般項 a_n を求めよ。

- (1) 10, 8, 4, -2, -10, …… (2) 1, 2, 6, 15, 31, ……

- (3) 0, -3, 6, -21, 60, ……

解答 (1) $a_n = -n^2 + n + 10$ (2) $a_n = \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 6)$

(3) $a_n = \frac{3}{4}\{(-3)^{n-1} - 1\}$

解説

- (1) この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、 $\{b_n\}$ は

$$-2, -4, -6, -8, \dots$$

$$\text{よって} \quad b_n = -2n$$

ゆえに、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = 10 + \sum_{k=1}^{n-1} (-2k) = 10 - 2 \cdot \frac{1}{2} (n - 1)n = -n^2 + n + 10$$

初項は $a_1 = 10$ であるから、この式は $n = 1$ のときにも成り立つ。

$$\text{したがって} \quad a_n = -n^2 + n + 10$$

- (2) この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、 $\{b_n\}$ は 1, 4, 9, 16, ……

$$\text{よって} \quad b_n = n^2$$

ゆえに、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1 + \frac{1}{6} (n - 1)n(2n - 1) = \frac{1}{6} (2n^3 - 3n^2 + n + 6) \dots\dots \text{①}$$

初項は $a_1 = 1$ であるから、この式は $n = 1$ のときにも成り立つ。

$$\text{したがって} \quad a_n = \frac{1}{6} (2n^3 - 3n^2 + n + 6)$$

- (3) この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、 $\{b_n\}$ は -3, 9, -27, 81, ……

$$\text{よって} \quad b_n = (-3)^n$$

$$\text{ゆえに、} n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} (-3)^k = \frac{-3\{1 - (-3)^{n-1}\}}{1 - (-3)} = \frac{3}{4}\{(-3)^{n-1} - 1\}$$

初項は $a_1 = 0$ であるから、この式は $n = 1$ のときにも成り立つ。

$$\text{したがって} \quad a_n = \frac{3}{4}\{(-3)^{n-1} - 1\}$$

3. 次の数列の一般項と、初項から第 n 項までの和をそれぞれ求めよ。

$$0, 5, 16, 33, 56, \dots$$

解答 一般項 $3n^2 - 4n + 1$, 和 $\frac{1}{2}n(n - 1)(2n + 1)$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし、その階差数列を $\{b_n\}$ とすると、 $\{b_n\}$ は

$$5, 11, 17, 23, \dots$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 5, 公差 6 の等差数列であるから

$$b_n = 5 + (n - 1) \times 6 = 6n - 1$$

ゆえに、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k - 1) = 6 \cdot \frac{1}{2} (n - 1)n - (n - 1) \\ &= 3n^2 - 4n + 1 \end{aligned}$$

初項は $a_1 = 0$ であるから、この式は $n = 1$ のときにも成り立つ。

$$\text{したがって} \quad a_n = 3n^2 - 4n + 1$$

また、求める和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (3k^2 - 4k + 1) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1) - 4 \cdot \frac{1}{2} n(n + 1) + n \\ &= \frac{1}{2} n\{(n + 1)(2n + 1) - 4(n + 1) + 2\} \\ &= \frac{1}{2} n(2n^2 - n - 1) \\ &= \frac{1}{2} n(n - 1)(2n + 1) \end{aligned}$$

4. 初項から第 n 項までの和 S_n が、次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

- (1) $S_n = n^2 - 4n$ (2) $S_n = n^3$ (3) $S_n = 2^n - 1$

解答 (1) $a_n = 2n - 5$ (2) $a_n = 3n^2 - 3n + 1$ (3) $a_n = 2^{n-1}$

解説

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n &= S_n - S_{n-1} = (n^2 - 4n) - \{(n - 1)^2 - 4(n - 1)\} \\ &= 2n - 5 \end{aligned}$$

() 組 () 番 名前 ()

$$\text{初項は} \quad a_1 = S_1 = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3$$

よって、 $a_n = 2n - 5$ は $n = 1$ のときにも成り立つ。

$$\text{したがって} \quad a_n = 2n - 5$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n &= S_n - S_{n-1} = n^3 - (n - 1)^3 \\ &= 3n^2 - 3n + 1 \end{aligned}$$

$$\text{初項は} \quad a_1 = S_1 = 1^3 = 1$$

よって、 $a_n = 3n^2 - 3n + 1$ は $n = 1$ のときにも成り立つ。

$$\text{したがって} \quad a_n = 3n^2 - 3n + 1$$

$$\begin{aligned} \text{(3)} \quad n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n &= S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) \\ &= 2 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} = (2 - 1) \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{初項は} \quad a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$$

よって、 $a_n = 2^{n-1}$ は $n = 1$ のときにも成り立つ。

$$\text{したがって} \quad a_n = 2^{n-1}$$

5. 初項から第 n 項までの和 S_n が、次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

- (1) $S_n = n^2 - 3n$ (2) $S_n = n^3 + 1$ (3) $S_n = 2^n - 3$

解答 (1) $a_n = 2n - 4$ (2) $a_1 = 2, n \geq 2$ のとき $a_n = 3n^2 - 3n + 1$
(3) $a_1 = -1, n \geq 2$ のとき $a_n = 2^{n-1}$

解説

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n &= S_n - S_{n-1} = (n^2 - 3n) - \{(n - 1)^2 - 3(n - 1)\} \\ &= n^2 - 3n - (n^2 - 2n + 1 - 3n + 3) \\ &= 2n - 4 \end{aligned}$$

$$\text{初項は} \quad a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \cdot 1 = -2$$

よって、 $a_n = 2n - 4$ は $n = 1$ のときにも成り立つ。

$$\text{したがって、一般項は} \quad a_n = 2n - 4$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n &= S_n - S_{n-1} = (n^3 + 1) - \{(n - 1)^3 + 1\} \\ &= n^3 + 1 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + 1) \\ &= 3n^2 - 3n + 1 \end{aligned}$$

$$\text{初項は} \quad a_1 = S_1 = 1^3 + 1 = 2$$

$$\text{したがって} \quad a_1 = 2, n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = 3n^2 - 3n + 1$$

$$\begin{aligned} \text{(3)} \quad n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n &= S_n - S_{n-1} = (2^n - 3) - (2^{n-1} - 3) = 2^n - 2^{n-1} \\ &= 2^{n-1}(2 - 1) = 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{初項は} \quad a_1 = S_1 = 2^1 - 3 = -1$$

$$\text{したがって} \quad a_1 = -1, n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = 2^{n-1}$$

6. 奇数の数列 1, 3, 5, …… を

$$(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \dots$$

のように、順に 1 個, 2 個, 3 個, …… の群に分ける。

(1) 第 n 番目の群の最初の奇数を n の式で表せ。

(2) 第 20 番目の群に入る奇数の和を求めよ。

解答 (1) $n^2 - n + 1$ (2) 8000

解説

- (1) 第 k 番目の群に入る奇数は k 個であるから、 $n \geq 2$ のとき、第 1 番目の群から第 $(n-1)$ 番目の群までに入る奇数は

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n \text{ (個)}$$

よって、第 n 番目の群の最初の奇数は、奇数の数列 1, 3, 5, $\cdots$ の

第 $\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$ 項である。この奇数の列の第 N 項は $1+(N-1)\cdot 2=2N-1$

となるので、 N に $\frac{1}{2}(n-1)n+1$ を代入して $2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-1=n^2-n+1$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

- (2) (1) の結果から、第 20 番目の群の最初の奇数は $n=20$ より $20^2-20+1=381$
第20群には、20項の項が属しているので
よって、求める和は初項 381, 公差 2, 項数 20 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 20\{2\cdot 381+(20-1)\cdot 2\}=8000$$

7. 偶数の数列 2, 4, 6, $\cdots$ を次のように、順に 1 個, 2 個, 3 個, $\cdots$ の群に分ける。

{2}, {4, 6}, {8, 10, 12}, {14, 16, 18, 20}, $\cdots$

- (1) 第 n 番目の群の最後の数を求めよ。
(2) 第 m 番目の群の最初の数を求めよ。
(3) 第 n 番目の群に入る偶数の和を求めよ。

解答 (1) $n(n+1)$ (2) m^2-m+2 (3) $n(n^2+1)$

解説

- (1) 第 k 番目の群に入る偶数は k 個であるから、第 1 番目の群から第 n 番目の群までに入る偶数は $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ (個)

よって、第 n 番目の群の最後の数は、偶数の数列 2, 4, 6, $\cdots$ の第 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 項である。この数列の第 N 項は $2+(N-1)\cdot 2=2N$ となるので、

N に $\frac{1}{2}n(n+1)$ を代入して $2\cdot \frac{1}{2}n(n+1)=n(n+1)$

- (2) $m \geq 2$ のとき、第 $(m-1)$ 番目の群の最後の数は、(1) の結果から $(m-1)m$
よって、第 m 番目の群の最初の数は $(m-1)m+2=m^2-m+2$ $\cdots$ ①
①において $m=1$ とすると、 $1^2-1+2=2$ となり、①は $m=1$ のときにも成り立つ。
したがって、第 m 番目の群の最初の数は m^2-m+2
(3) (1), (2) の結果から、第 n 番目の群の最初の数は n^2-n+2 , 最後の数は $n(n+1)$ である。
よって、求める和は初項 n^2-n+2 , 末項 $n(n+1)$, 項数 n の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}n\{(n^2-n+2)+n(n+1)\}=n(n^2+1)$$

8. 数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \cdots$ について $\frac{13}{29}$ は第何項か。また、第 244 項を求めよ。

解答 第 419 項, $\frac{13}{22}$

解説

分母が同じもので区切った群数列 $1\left|\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right|\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\left|\cdots\right.$ において、 $\frac{13}{29}$ は第

29 群の 13 番目の項である。

$\sum_{k=1}^{28} k+13=\frac{1}{2}\cdot 28\cdot 29+13=419$ であるから、 $\frac{13}{29}$ は 第 419 項

また、第 244 項が第 n 群に含まれるとすると $\sum_{k=1}^{n-1} k<244\leq \sum_{k=1}^n k$

よって $\frac{1}{2}(n-1)n<244\leq \frac{1}{2}n(n+1)$

すなわち $n(n+1)<488\leq n(n+1)$

$n(n-1)$, $n(n+1)$ はともに n が増加すると増加し、 $22\cdot 21=462<488<506=22\cdot 23$
から、 $n=22$ のみ適する。 ($\sqrt{488}=2\sqrt{122}\asymp 2\sqrt{121}=2\times 11=22$)

ここで、第21群の最後の項は最初から数えて $1+2+\cdots+21=\sum_{k=1}^{21} k$ 番目なので

$244-\sum_{k=1}^{21} k=244-\frac{1}{2}\cdot 21\cdot 22=13$ から、第 244 項は $\frac{13}{22}$

9. 1 から順に自然数を並べて、下のように 1 個, 2 個, 4 個, $\cdots$ となるように群に分ける。ただし、第 n 群を含む数の個数は 2^{n-1} 個である。

1 | 2, 3 | 4, 5, 6, 7 | 8, $\cdots$

- (1) 第 5 群の初めの数と終わりの数を求めよ。
(2) 第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。

解答 (1) 初めの数は 16, 終わりの数は 31 (2) $2^{n-2}(3\cdot 2^{n-1}-1)$

解説

(1) 第 4 群までの項の総数は $1+2+2^2+2^3=15$

第 5 群までの項の総数は $1+2+2^2+2^3+2^4=31$

よって、第 5 群の初めの数は 16, 終わりの数は 31

(2) $n \geq 2$ のとき、第 $(n-1)$ 群までの項の総数は

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}=\frac{1\cdot (2^{n-1}-1)}{2-1}=2^{n-1}-1$$

よって、第 $(n-1)$ 群の最後の数は $2^{n-1}-1$ であるから、

第 n 群の初めの数はこの数の 1 つ先である。

ゆえに、第 n 群の初めの数は $(2^{n-1}-1)+1$ すなわち 2^{n-1}

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって、第 n 群に含まれる数の総和は、初項が 2^{n-1} , 公差が 1, 項数が 2^{n-1} の等差数列の和となる。

ゆえに、求める和は $\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}\{2\cdot 2^{n-1}+(2^{n-1}-1)\cdot 1\}=2^{n-2}(3\cdot 2^{n-1}-1)$