数学演習（階差数列•和から一般項•群数列）Ｈ２３．１１．２４　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　)

1．次の数列の一般項 a_n を求めよ。

(1)　10，8，4，-2，-10，……　　(2)　1，2，6，15，31，……

(3)　0，-3，6，-21，60，……

2．次の数列の一般項を求めよ。

-3，2，19，52，105，182，287，……

3．次の数列の一般項と，初項から第 n 項までの和をそれぞれ求めよ。

0，5，16，33，56，……

4．初項から第 n 項までの和 S_n が次の関係式を満たすような数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(1)　$S_n=2n^2+n$　　(2)　$S_n=4^n-1$

(3)　$S_n=3n^2-2n+1$

5．偶数の数列 2，4，6，…… を次のように，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

$\{2\}$，$\{4,\ 6\}$，$\{8,\ 10,\ 12\}$，$\{14,\ 16,\ 18,\ 20\}$，……

(1)　第 n 番目の群の最後の数を求めよ。

(2)　第 m 番目の群の最初の数を求めよ。

(3)　第 n 番目の群に入る偶数の和を求めよ。

6．数列 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{4}$，…… について $\frac{13}{29}$ は第何項か。また，第 244 項を求めよ。

7．奇数の数列 1，3，5，…… を

(1)，(3，5)，(7，9，11)，(13，15，17，19)，……

のように，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

(1)　第 n 番目の群の最初の奇数を n の式で表せ。

(2)　第 20 番目の群に入る奇数の和を求めよ。

8．自然数の数列を次のように，順に 1 個，2 個，4 個，8 個，…… の群に分ける。

{1}，{2，3}，{4，5，6，7}，{8，9，10，……，15}，……

(1)　第 1 番目の群の数から第 n 番目の群の終わりの数までの和を求めよ。

(2)　100 は第何番目の群の第何番目の数か。

9．数列 $\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{7}{4}$，$\frac{1}{5}$，…… について

(1)　$\frac{5}{8}$ は第何項か。

(2)　この数列の第 800 項を求めよ。

(3)　この数列の初項から第 800 項までの和を求めよ。

10．数列 1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，5，5，5，5，5，6，…… の第 n 項を a_n とする。

この数列を

1 | 2，2 | 3，3，3 | 4，4，4，4 | 5，5，5，5，5 | 6，……

のように 1 個，2 個，3 個，4 個，…… と区画に分ける。

(1)　第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の個数を求めよ。

(2)　第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の総和を求めよ。

(3)　$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n \geqq 3000$ となる最小の自然数 n を求めよ。

11．1 から順に自然数を並べて，下のように 1 個，2 個，4 個，…… となるように群に分ける。ただし，第 n 群が含む数の個数は 2^{n-1} 個である。

1 | 2，3 | 4，5，6，7 | 8，……

(1)　第 5 群の初めの数と終わりの数を求めよ。

(2)　第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。

1．次の数列の一般項 a_n を求めよ。

(1)　10，8，4，−2，−10，……　　(2)　1，2，6，15，31，……

(3)　0，−3，6，−21，60，……

解答　(1)　$a_n=-n^2+n+10$　　(2)　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$

(3)　$a_n=\frac{3}{4}\{(-3)^{n-1}-1\}$

解説

(1)　この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

-2，-4，-6，-8，……

よって　$b_n=-2n$

ゆえに，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=10+\sum_{k=1}^{n-1}(-2k)=10-2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=-n^2+n+10$$

初項は $a_1=10$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=-n^2+n+10$

(2)　この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は　1，4，9，16，……

よって　$b_n=n^2$

ゆえに，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2=1+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)\cdots\cdots ①$$

初項は $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)$

(3)　この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は　-3，9，-27，81，……

よって　$b_n=(-3)^n$

ゆえに，$n\geqq2$ のとき　$a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}(-3)^k=\frac{-3\{1-(-3)^{n-1}\}}{1-(-3)}=\frac{3}{4}\{(-3)^{n-1}-1\}$

初項は $a_1=0$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{3}{4}\{(-3)^{n-1}-1\}$

2．次の数列の一般項を求めよ。

-3，2，19，52，105，182，287，……

解答　$\frac{1}{3}(2n^3+6n^2-17n)$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$，その階差数列を $\{b_n\}$ とする。

また，$\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると

$\{b_n\}$：5，17，33，53，77，105，……

$\{c_n\}$：12，16，20，24，28，……

ゆえに，$\{c_n\}$ は，初項 12，公差 4 の等差数列であるから，その一般項は

$c_n=12+(n-1)\cdot4=4n+8$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+8)=5+4\sum_{k=1}^{n-1}k+8\sum_{k=1}^{n-1}1$$
$$=5+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+8(n-1)=2n^2+6n-3$$

この式に $n=1$ を代入すると，$b_1=2+6-3=5$ となるから

$b_n=2n^2+6n-3$ $(n\geqq1)$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k^2+6k-3)=-3+2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+6\sum_{k=1}^{n-1}k-3\sum_{k=1}^{n-1}1$$
$$=-3+2\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-3(n-1)$$
$$=\frac{1}{3}(2n^3+6n^2-17n)$$

初項は -3 であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

以上により，一般項 a_n は　$a_n=\frac{1}{3}(2n^3+6n^2-17n)$

3．次の数列の一般項と，初項から第 n 項までの和をそれぞれ求めよ。

0，5，16，33，56，……

解答　一般項 $3n^2-4n+1$，和 $\frac{1}{2}n(n-1)(2n+1)$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

5，11，17，23，……

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 5，公差 6 の等差数列であるから

$b_n=5+(n-1)\times6=6n-1$

ゆえに，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}(6k-1)=6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$$
$$=3n^2-4n+1$$

初項は $a_1=0$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=3n^2-4n+1$

また，求める和を S_n とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(3k^2-4k+1)$$
$$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$=\frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1)-4(n+1)+2\}$$
$$=\frac{1}{2}n(2n^2-n-1)$$
$$=\frac{1}{2}n(n-1)(2n+1)$$

4．初項から第 n 項までの和 S_n が次の関係式を満たすような数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(1)　$S_n=2n^2+n$　　(2)　$S_n=4^n-1$

(3)　$S_n=3n^2-2n+1$

解答　(1)　$a_n=4n-1$　　(2)　$a_n=3\cdot4^{n-1}$　　(3)　$a_1=2$，$n\geqq2$ のとき $a_n=6n-5$

解説

(1)　$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2+n)-\{2(n-1)^2+(n-1)\}$$
$$=4n-1$$

また，$n=1$ のとき　$a_1=S_1=2\cdot1^2+1=3$

よって，$a_n=4n-1$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに　$a_n=4n-1$

(2)　$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(4^n-1)-(4^{n-1}-1)=(4-1)\cdot4^{n-1}$$
$$=3\cdot4^{n-1}$$

また，$n=1$ のとき　$a_1=S_1=4^1-1=3$

よって，$a_n=3\cdot4^{n-1}$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに　$a_n=3\cdot4^{n-1}$

(3)　$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2-2n+1)-\{3(n-1)^2-2(n-1)+1\}$$
$$=6n-5$$

また，$n=1$ のとき　$a_1=S_1=3\cdot1^2-2\cdot1+1=2$

よって，$a_n=6n-5$ は $n=1$ のときには成り立たない。

ゆえに　$a_1=2$，$n\geqq2$ のとき $a_n=6n-5$

5．偶数の数列 2，4，6，…… を次のように，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

{2}，{4，6}，{8，10，12}，{14，16，18，20}，……

(1)　第 n 番目の群の最後の数を求めよ。

(2)　第 m 番目の群の最初の数を求めよ。

(3)　第 n 番目の群に入る偶数の和を求めよ。

解答　(1)　$n(n+1)$　　(2)　m^2-m+2　　(3)　$n(n^2+1)$

解説

(1)　第 k 番目の群に入る偶数は k 個であるから，第 1 番目の群から第 n 番目の群までに入る偶数は　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ (個)

よって，第 n 番目の群の最後の数は，偶数の数列 2，4，6，…… の第 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 項である。この数列の第N項は　$2+(N-1)\cdot2=2N$　となるので，

Nに$\frac{1}{2}n(n+1)$を代入して　$2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=n(n+1)$

(2)　$m\geqq2$ のとき，第 $(m-1)$ 番目の群の最後の数は，(1) の結果から　$(m-1)m$

よって，第 m 番目の群の最初の数は　$(m-1)m+2=m^2-m+2$　…… ①

① において $m=1$ とすると，$1^2-1+2=2$ となり，① は $m=1$ のときにも成り立つ。

したがって，第 m 番目の群の最初の数は　m^2-m+2

(3)　(1)，(2) の結果から，第 n 番目の群の最初の数は n^2-n+2，最後の数は $n(n+1)$ である。

よって，求める和は初項 n^2-n+2，末項 $n(n+1)$，項数 n の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}n\{(n^2-n+2)+n(n+1)\}=n(n^2+1)$$

6．数列 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ \cdots\cdots$ について $\frac{13}{29}$ は第何項か。また，第 244 項を求めよ。

解答　第 419 項，$\frac{13}{22}$

解説

分母が同じもので区切った群数列　$1\ \Big|\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2}\ \Big|\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3}\ \Big|\cdots\cdots$ において，$\frac{13}{29}$ は第 29 群の 13 番目の項である。

$\sum_{k=1}^{28} k+13=\frac{1}{2}\cdot 28\cdot 29+13=419$ であるから，$\frac{13}{29}$ は　第 419 項

また，第 244 項が第 n 群に含まれるとすると　$\sum_{k=1}^{n-1} k<244\leqq\sum_{k=1}^{n} k$

よって　$\frac{1}{2}(n-1)n<244\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$

すなわち　$n(n+1)<488\leqq n(n+1)$

$n(n-1)$，$n(n+1)$ はともに n が増加すると増加し，$22\cdot21=462<488<506=22\cdot23$
から，$n=22$ のみ適する。（$\sqrt{488}=2\sqrt{122}\fallingdotseq 2\sqrt{121}=2\times11=22$）

ここで，第21群の最後の項は最初から数えて　$1+2+\cdots\cdots+21=\sum_{k=1}^{21}k$ 番目なので

$244-\sum_{k=1}^{21}k=244-\frac{1}{2}\cdot21\cdot22=13$ から，第 244 項は　$\frac{13}{22}$

7．奇数の数列 1，3，5，…… を

(1)，(3，5)，(7，9，11)，(13，15，17，19)，……

のように，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

(1)　第 n 番目の群の最初の奇数を n の式で表せ。

(2)　第 20 番目の群に入る奇数の和を求めよ。

解答　(1)　n^2-n+1　(2)　8000

解説

(1)　第 k 番目の群に入る奇数は k 個であるから，$n\geqq2$ のとき，第 1 番目の群から第 $(n-1)$ 番目の群までに入る奇数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n \text{ (個)}$$

よって，第 n 番目の群の最初の奇数は，奇数の数列 1，3，5，…… の

第 $\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$ 項である。この奇数の列の第N項は　$1+(N-1)\cdot2=2N-1$

となるので，Nに$\frac{1}{2}(n-1)n+1$を代入して　$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-1=n^2-n+1$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

(2)　(1) の結果から，第 20 番目の群の最初の奇数は　$n=20$より　$20^2-20+1=381$

第20群には，20項の項が属しているので

よって，求める和は初項 381，公差 2，項数 20 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot20\{2\cdot381+(20-1)\cdot2\}=8000$$

8．自然数の数列を次のように，順に 1 個，2 個，4 個，8 個，…… の群に分ける。

{1}，{2，3}，{4，5，6，7}，{8，9，10，……，15}，……

(1)　第 1 番目の群の数から第 n 番目の群の終わりの数までの和を求めよ。

(2)　100 は第何番目の群の第何番目の数か。

解答　(1)　$\frac{1}{2}(4^n-2^n)$　(2)　第 7 番目の群の第 37 番目

解説

(1)　第 k 番目の群に入る数は 2^{k-1} 個 であるから，第 1 番目の群から第 n 番目の群に入る数の個数は　$1+2+4+\cdots\cdots+2^{n-1}=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

（初項　1，公比　2，項数 n の等比数列の和）

よって，第 n 番目の群の最後の数を a_n とすると　$a_n=2^n-1$

したがって，求める和は自然数の数列の初項から第 (2^n-1) 項までの和であるから

$1+2+\cdots\cdots+N=\frac{1}{2}N(N+1)$　のNに2^n-1を代入して

$1+2+3+\cdots\cdots+(2^n-1)$

$=\frac{1}{2}(2^n-1)\{(2^n-1)+1\}$

$=\frac{1}{2}(2^n-1)\cdot2^n=\frac{1}{2}(2^n2^n-2^n)=\frac{1}{2}(4^n-2^n)$

(2)　100 が第 n 番目の群に入るとすると　$a_{n-1}<100\leqq a_n$

よって　$2^{n-1}-1<100\leqq2^n-1$　ゆえに　$2^{n-1}<101\leqq2^n$ ……①

$2^6=64$，$2^7=128$ であるから，① を満たす自然数 n は　$n=7$

すなわち，100 は第 7 番目の群に入る。

ここで，第6番目の群の最後の数は$a_6=2^6-1=63$ であり，$100-63=37$ であるから，
100 は第 7 番目の群の第 37 番目の数である。

9．数列 $\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{7}{4}$，$\frac{1}{5}$，…… について

(1)　$\frac{5}{8}$ は第何項か。　(2)　この数列の第 800 項を求めよ。

(3)　この数列の初項から第 800 項までの和を求めよ。

解答　(1)　第 31 項　(2)　$\frac{39}{40}$　(3)　790

解説

$\frac{1}{1}\left|\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right|\frac{1}{3},\frac{3}{3},\frac{5}{3}\left|\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4}\right|\frac{1}{5}$，……

のように群に分ける。

(1)　$\frac{5}{8}$ は第 8 群の 3 番目の項である。第1群から第7群までには$\sum_{k=1}^{7}k$ 個の項があるので

$\sum_{k=1}^{7}k+3=31$ であるから　第 31 項

(2)　第 800 項が第 n 群に含まれるとすると　$\sum_{k=1}^{n-1}k<800\leqq\sum_{k=1}^{n}k$

よって　$(n-1)n<1600\leqq n(n+1)$

これを満たす自然数 n は　$39\cdot40=1560$，$40\cdot41=1640$ より　$n=40$

（$\sqrt{1600}=40$より見当をつけてもいい）

第39群の最後の項は，最初から数えて$1+2+3+\cdots+39=\sum_{k=1}^{39}k$ 番目なので

$800-\sum_{k=1}^{39}k=20$ であるから　第800項は　$\frac{39}{40}$

(3)　第 n 群の n 個の分数の和は　$\frac{1}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{2n-1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\cdot n^2=n$

ゆえに，第1群から第39群までは，群ごとに加え，第40群は$\frac{1}{40}$か$\frac{39}{40}$までの

20項を足せばよい。求める和は

$$\sum_{k=1}^{39}k+\left(\frac{1}{40}+\frac{3}{40}+\frac{5}{40}+\cdots\cdots+\frac{39}{40}\right)=\frac{1}{2}\cdot39\cdot40+\frac{1}{40}\left\{\frac{1}{2}\cdot20(1+39)\right\}=790$$

10．数列 1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，5，5，5，5，5，6，…… の第 n 項を a_n とする。

この数列を

1 | 2，2 | 3，3，3 | 4，4，4，4 | 5，5，5，5，5 | 6，……

のように 1 個，2 個，3 個，4 個，…… と区画に分ける。

(1)　第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の個数を求めよ。

(2)　第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の総和を求めよ。

(3)　$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n\geqq3000$ となる最小の自然数 n を求めよ。

解答　(1)　210 個　(2)　2870　(3)　217

解説

(1)　第 k 区画に含まれる項の個数は k である。

よって，第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の個数は

$$1+2+\cdots+20=\sum_{k=1}^{20}k=\frac{1}{2}\cdot20\cdot21=210 \text{ (個)}$$

(2)　第 k 区画に含まれる項の総和は

$$k+k+\cdots+k=k\cdot k=k^2$$

よって，第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の総和は

$$1^2+2^2+\cdots+20^2=\sum_{k=1}^{20}k^2=\frac{1}{6}\cdot20\cdot21\cdot41=2870$$

(3)　第 21 区画の総和は　$21^2=441$

(2) より，第 1 区画から第 21 区画までの区画に含まれる項の総和は

$2870+441=3311$

よって，第21区画のある数までの和で初めて3000を超えるので

a_n は第 21 区画に含まれる。

$3000-2870=130$ であるから，第21区画の1番目から何番目までの和で

130を超えるか考えると，$21\cdot6=126$，$21\cdot7=147$ であるから，

7番目までで130を初めて超える。よって，求める最小の自然数 n の

値は　$n=210+7=217$

11．1 から順に自然数を並べて，下のように 1 個，2 個，4 個，…… となるように群に分ける。ただし，第 n 群が含む数の個数は 2^{n-1} 個である。

1 | 2，3 | 4，5，6，7 | 8，……

(1)　第 5 群の初めの数と終わりの数を求めよ。

(2)　第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。

解答　(1)　初めの数は 16，終わりの数は 31　(2)　$2^{n-2}(3\cdot2^{n-1}-1)$

解説

(1)　第 4 群までの項の総数は　$1+2+2^2+2^3=15$

第 5 群までの項の総数は　$1+2+2^2+2^3+2^4=31$

よって，第 5 群の初めの数は 16，終わりの数は 31

(2)　$n\geqq2$ のとき，第 $(n-1)$ 群までの項の総数は

$$\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^{n-1}-1$$

よって，第$(n-1)$群の最後の数は$2^{n-1}-1$であるから，

第n群の初めの数はこの数の1つ先である。

ゆえに，第 n 群の初めの数は　$(2^{n-1}-1)+1$　すなわち　2^{n-1}

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，第 n 群に含まれる数の総和は，初項が 2^{n-1}，公差が 1，項数が 2^{n-1} の等差数列の和となる。

ゆえに，求める和は　$\frac{1}{2}\cdot2^{n-1}\{2\cdot2^{n-1}+(2^{n-1}-1)\cdot1\}=2^{n-2}(3\cdot2^{n-1}-1)$