数学演習（数列）Ｈ２４．１１．１３　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．第 3 項が 10，第 6 項が 22 である等差数列の初項は ア$\boxed{}$，公差は イ$\boxed{}$ である。
また，第 30 項は ウ$\boxed{}$，50 は第 エ$\boxed{}$ 項である。

２．次の等差数列の和を求めよ。　123，120，117，……，-24

３．公比が負である等比数列において，初項から第 3 項までの和が 9，第 3 項から第 5 項までの和が 36 である。この数列の一般項を求めよ。

４．次の和を求めよ。　$\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

５．次の和を求めよ。

(1)　$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+\cdots\cdots+n(2n-1)$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}$

６. 次の和 S を求めよ。

$$S=1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots\cdots+n\cdot 3^{n-1}$$

７. 次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$2,\ 2+4,\ 2+4+6,\ 2+4+6+8,\ \cdots\cdots$$

８. 階差数列を利用して，次の数列の一般項 a_n を求めよ。　1，2，7，16，29，……

９. 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=2^n-3$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

10. 偶数の数列 2，4，6，…… を次のように，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

$$\{2\},\ \{4,\ 6\},\ \{8,\ 10,\ 12\},\ \{14,\ 16,\ 18,\ 20\},\ \cdots\cdots$$

(1)　第 n 番目の群の最後の数を求めよ。

(2)　第 m 番目の群の最初の数を求めよ。

(3)　第 n 番目の群に入る偶数の和を求めよ。

数学演習（数列）Ｈ２４．１１．１３　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．第 3 項が 10，第 6 項が 22 である等差数列の初項は ア$\boxed{}$，公差は イ$\boxed{}$ である。

また，第 30 項は ウ$\boxed{}$，50 は第 エ$\boxed{}$ 項である。

解答　（ア）2　（イ）4　（ウ）118　（エ）13

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その初項を a，公差を d とする。

$a_3=10$ であるから　$a+2d=10$　…… ①

$a_6=22$ であるから　$a+5d=22$　…… ②

①，② を解いて　$a=2,\ d=4$

よって，初項は ア2，公差は イ4 である。

また，一般項 a_n は　$a_n=2+(n-1)\times4=4n-2$

したがって　$a_{30}=4\cdot30-2=$ ウ118

更に，$a_n=50$ とすると　$4n-2=50$　　よって　$n=13$

したがって，50 は 第 エ13 項 である。

2．次の等差数列の和を求めよ。　123，120，117，……，-24

解答　2475

解説

初項は 123，公差は -3 であるから，項数を n とすると

$123+(n-1)\cdot(-3)=-24$　　よって　$n=50$

したがって，求める和は　$\dfrac{1}{2}\cdot50\{123+(-24)\}=2475$

3．公比が負である等比数列において，初項から第 3 項までの和が 9，第 3 項から第 5 項までの和が 36 である。この数列の一般項を求めよ。

解答　$3(-2)^{n-1}$

解説

初項を a，公比を r とすると，条件から

$a+ar+ar^2=9$　…… ①

$ar^2+ar^3+ar^4=36$　…… ②

② から　$r^2(a+ar+ar^2)=36$

① を代入して　$9r^2=36$　　よって　$r^2=4$

問題文より $r<0$ であるから　$r=-2$

$r=-2$ を ① に代入すると　$a-2a+4a=9$

よって　$a=3$

したがって，求める一般項は　$3(-2)^{n-1}$

4．次の和を求めよ。　$\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

解答　$\dfrac{n}{3n+1}$

解説

これは，第 k 項が $\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

ここで，$\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3k-2}-\dfrac{1}{3k+1}\right)$ であるから，求める和は

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}$$

5．次の和を求めよ。

(1)　$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+\cdots\cdots+n(2n-1)$　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}$

解答　(1)　$\dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$　　(2)　121

解説

(1)　これは，第 k 項が $k(2k-1)$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k=2\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

注意　自分で「初項･公比･項数」の３つを見抜け！

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}=\frac{1\times(3^5-1)}{3-1}=121$

6．次の和 S を求めよ。

$$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1}$$

解答　$\dfrac{(2n-1)\cdot3^n+1}{4}$

解説

$$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1}$$

$$3S=\qquad 1\cdot3+2\cdot3^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot3^{n-1}+n\cdot3^n$$

辺々を引くと　$S-3S=1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-1}-n\cdot3^n$

よって　$-2S=\dfrac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}-n\cdot3^n=\dfrac{3^n-1}{2}-n\cdot3^n=\dfrac{3^n-1-2n\cdot3^n}{2}$

$=\dfrac{(1-2n)\cdot3^n-1}{2}$

したがって　$S=\dfrac{(2n-1)\cdot3^n+1}{4}$

7．次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

2，2＋4，2＋4＋6，2＋4＋6＋8，……

解答　順に　$k(k+1)$，$\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

解説

数列の第 k 項を a_k，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$$a_k=2+4+6+\cdots\cdots+2k=\sum_{n=1}^{k}2n=2\cdot\frac{1}{2}k(k+1)=k(k+1)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\times2(n+2)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

8．階差数列を利用して，次の数列の一般項 a_n を求めよ。　1，2，7，16，29，……

解答　$a_n=2n^2-5n+4$

解説

この数列の階差数列は　1，5，9，13，……

これは初項が 1，公差が 4 の等差数列であるから，その一般項を b_n とすると

$b_n=1+(n-1)\times4$　　すなわち　$b_n=4n-3$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-3)=1+4\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}3=1+4\times\frac{1}{2}(n-1)n-3(n-1)$$

すなわち　$a_n=2n^2-5n+4$

初項は $a_1=1$ であるから，上の a_n は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項 a_n は　$a_n=2n^2-5n+4$

9．初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=2^n-3$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_1=-1$，$n\geqq 2$ のとき $a_n=2^{n-1}$

解説

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-3)-(2^{n-1}-3)=2^n-2^{n-1}$

$=2^{n-1}(2-1)=2^{n-1}$

初項は　$a_1=S_1=2^1-3=-1$

したがって　$a_1=-1$，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=2^{n-1}$

10．偶数の数列 2，4，6，…… を次のように，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

$\{2\}$，$\{4,\ 6\}$，$\{8,\ 10,\ 12\}$，$\{14,\ 16,\ 18,\ 20\}$，……

(1)　第 n 番目の群の最後の数を求めよ。

(2)　第 m 番目の群の最初の数を求めよ。

(3)　第 n 番目の群に入る偶数の和を求めよ。

解答　(1)　$n(n+1)$　(2)　m^2-m+2　(3)　$n(n^2+1)$

解説

(1)　第 k 番目の群に入る偶数は k 個であるから，第 1 番目の群から第 n 番目の群までに入る偶数は　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ (個)

よって，第 n 番目の群の最後の数は，偶数の数列 2，4，6，…… の第 $\dfrac{1}{2}n(n+1)$ 項である。この数列の第N項は　$2+(N-1)\cdot 2=2N$　となるので，

Nに$\dfrac{1}{2}n(n+1)$を代入して　$2\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)=n(n+1)$

(2)　$m\geqq 2$ のとき，第 $(m-1)$ 番目の群の最後の数は，(1) の結果から　$(m-1)m$

よって，第 m 番目の群の最初の数は　$(m-1)m+2=m^2-m+2$　…… ①

① において $m=1$ とすると，$1^2-1+2=2$ となり，① は $m=1$ のときにも成り立つ。

したがって，第 m 番目の群の最初の数は　m^2-m+2

(3)　(1)，(2) の結果から，第 n 番目の群の最初の数は n^2-n+2，最後の数は $n(n+1)$ である。

よって，求める和は初項 n^2-n+2，末項 $n(n+1)$，項数 n の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}n\{(n^2-n+2)+n(n+1)\}=n(n^2+1)$$