数学演習（数列）Ｈ２４．１１．９　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．第 6 項が 33，第 11 項が 63 である等差数列において，第 16 項を求めよ。また，200 より大きくなるのは第何項からか。

２．1 から 100 までの整数について，次の和を求めよ。
(1)　4 の倍数の和　　(2)　4 の倍数でない数の和

３．初項が 70，公差が -4 である等差数列において
(1)　第何項が初めて負になるか。
(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

４．等比数列 $\{a_n\}$ について，$a_2+a_3=6$，$a_4+a_5=54$ である。このとき，数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ。

５．次の和を求めよ。　(1)　$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$　　(2)　$\sum_{k=1}^{n}(-4)^k$

６．次の和を求めよ。　$\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}$

7．次の和 S を求めよ。

$$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1}$$

8．次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ \cdots\cdots$$

9．階差数列を利用して，次の数列の一般項 a_n を求めよ。　2，5，14，41，122，……

10. 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2-4n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

11. 奇数の数列 1，3，5，…… を

(1)，(3，5)，(7，9，11)，(13，15，17，19)，……

のように，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

(1)　第 n 番目の群の最初の奇数を n の式で表せ。

(2)　第 20 番目の群に入る奇数の和を求めよ。

1. 第 6 項が 33，第 11 項が 63 である等差数列において，第 16 項を求めよ。また，200 より大きくなるのは第何項からか。

解答　（前半）93　（後半）第 34 項

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その初項を a，公差を d とする。

$a_6=33$ であるから　$a+5d=33$　…… ①

$a_{11}=63$ であるから　$a+10d=63$　…… ②

①，② を解いて　$a=3,\ d=6$

よって　$a_n=3+(n-1)\times 6=6n-3$

したがって　$a_{16}=6\cdot 16-3=93$

また，$a_n>200$ とすると　$6n-3>200$　よって　$n>\dfrac{203}{6}=33.8\cdots\cdots$　…… ①

① を満たす最小の自然数 n は　$n=34$

よって，200 より大きくなるのは第 34 項からである。

2. 1 から 100 までの整数について，次の和を求めよ。

(1)　4 の倍数の和　　(2)　4 の倍数でない数の和

解答　(1)　1300　(2)　3750

解説

(1)　求める和は

$$4+8+12+\cdots\cdots+100=4(1+2+3+\cdots\cdots+25)$$
$$=4\times\frac{1}{2}\cdot 25(25+1)$$
$$=1300$$

(2)　求める和は

$$1+2+3+\cdots\cdots+100-(4+8+12+\cdots\cdots+100)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 100(100+1)-1300=5050-1300$$
$$=3750$$

3. 初項が 70，公差が -4 である等差数列において

(1)　第何項が初めて負になるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

解答　(1)　第 19 項　(2)　第 18 項，和 648

解説

一般項を a_n とすると　$a_n=70+(n-1)\times(-4)=74-4n$

(1)　$a_n<0$ とすると　$74-4n<0$　よって　$n>\dfrac{37}{2}=18.5$　…… ①

① を満たす最小の自然数 n は　$n=19$

したがって，第 19 項が初めて負になる。

(2)　(1) の結果から　$a_1>0,\ a_2>0,\ \cdots\cdots,\ a_{18}>0,\ a_{19}<0,\ a_{20}<0,\ \cdots\cdots$

よって，正のものだけ足せばいいので，初項から第 18 項までの和が最大となる。

また，そのときの和は　$\dfrac{1}{2}\cdot 18\{2\cdot 70+(18-1)\cdot(-4)\}=648$

4. 等比数列 $\{a_n\}$ について，$a_2+a_3=6$，$a_4+a_5=54$ である。このとき，数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ。

解答　初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 3 または 初項 1，公比 -3

解説

初項を a，公比を r とする。

$a_2+a_3=6$ であるから　$ar+ar^2=6$　…… ①

$a_4+a_5=54$ であるから　$ar^3+ar^4=54$　…… ②

② から　$(ar+ar^2)r^2=54$　① を代入して　$6r^2=54$

よって，$r^2=9$ から　$r=\pm 3$

① から　$r=3$ のとき　$3a+9a=6$　ゆえに　$a=\dfrac{1}{2}$

$r=-3$ のとき　$-3a+9a=6$　ゆえに　$a=1$

したがって　初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 3 または 初項 1，公比 -3

5. 次の和を求めよ。　(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-4)^k$

解答　(1)　$\dfrac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$　(2)　$-\dfrac{(-4)^{n+1}+4}{5}$

解説

(1)　$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\times\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n$$
$$=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)-\frac{6}{3}n(n+1)+\frac{3}{3}n$$
$$=\frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(4n^2-1)=\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$$

(2)　**注意**　自分で「初項･公比･項数」の３つを見抜け！

$$\sum_{k=1}^{n}(-4)^k=\frac{-4\times\{1-(-4)^n\}}{1-(-4)}=\frac{-4-(-4)^{n+1}}{5}=-\frac{(-4)^{n+1}+4}{5}$$

6. 次の和を求めよ。　$\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 8}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2n(2n+2)}$

解答　$\dfrac{n}{4(n+1)}$

解説

これは，第 k 項が $\dfrac{1}{2k(2k+2)}$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

ここで，$\dfrac{1}{2k(2k+2)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$ であるから，求める和は

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$$

7．次の和 S を求めよ。

$$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1}$$

解答　$\dfrac{(2n-1)\cdot3^n+1}{4}$

解説

参考　等差数列×等比数列の形なので、ずらして引くことを考える。

$$S=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1}$$

$$3S=\qquad 1\cdot3+2\cdot3^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot3^{n-1}+n\cdot3^n$$

辺々を引くと　$S-3S=1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-1}-n\cdot3^n$

よって　$-2S=\dfrac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}-n\cdot3^n=\dfrac{3^n-1}{2}-n\cdot3^n=\dfrac{3^n-1-2n\cdot3^n}{2}$

$$=\frac{(1-2n)\cdot3^n-1}{2}$$

したがって　$S=\dfrac{(2n-1)\cdot3^n+1}{4}$

8．次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ \cdots\cdots$$

解答　第 k 項 2^k-1，$S_n=2^{n+1}-n-2$

解説

第 k 項は$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{k-1}$となる。これは，初項1，公比2，項数$k$の等比数列の和なので，等比数列の和の公式より

$$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^k-1)}{2-1}=2^k-1$$

よって　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1=\frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$

9．階差数列を利用して，次の数列の一般項 a_n を求めよ。　2，5，14，41，122，……

解答　$a_n=\dfrac{3^n+1}{2}$

解説

この数列の階差数列は　3，9，27，81，……

これは初項が 3，公比が 3 の等比数列であるから，その一般項を b_n とすると

$b_n=3\cdot3^{n-1}$　すなわち　$b_n=3^n$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k=2+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

すなわち　$a_n=\dfrac{3^n+1}{2}$

初項は $a_1=2$ であるから，上の a_n は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項 a_n は　$a_n=\dfrac{3^n+1}{2}$

10．初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2-4n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=2n-5$

解説

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-4n)-\{(n-1)^2-4(n-1)\}$

$=2n-5$

初項は　$a_1=S_1=1^2-4\cdot1=-3$

よって，$a_n=2n-5$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=2n-5$

11．奇数の数列 1，3，5，…… を

(1)，(3，5)，(7，9，11)，(13，15，17，19)，……

のように，順に 1 個，2 個，3 個，…… の群に分ける。

(1)　第 n 番目の群の最初の奇数を n の式で表せ。

(2)　第 20 番目の群に入る奇数の和を求めよ。

解答　(1)　n^2-n+1　(2)　8000

解説

(1)　第 k 番目の群に入る奇数は k 個であるから，$n\geqq2$ のとき，第 1 番目の群から第 $(n-1)$ 番目の群までに入る奇数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n\ (\text{個})$$

よって，第 n 番目の群の最初の奇数は，奇数の数列 1，3，5，…… の

第 $\left\{\dfrac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$ 項である。この奇数の列の第N項は　$1+(N-1)\cdot2=2N-1$

となるので，Nに$\dfrac{1}{2}(n-1)n+1$を代入して　$2\left\{\dfrac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-1=n^2-n+1$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

(2)　(1) の結果から，第 20 番目の群の最初の奇数は　$n=20$より　$20^2-20+1=381$

第20群には，20項の項が属しているので

よって，求める和は初項 381，公差 2，項数 20 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot20\{2\cdot381+(20-1)\cdot2\}=8000$$