

1. 次のような等比数列の初めの 5 項を求めよ。

(1) 初項 3, 公比 2

(2) 初項 9, 公比 $-\frac{1}{3}$

2. 次の等比数列の公比を求めよ。また、 に適する数を求めよ。

(1) 2, 6, 18, , , ……

(2) , 2, $-2\sqrt{2}$, , ……

3. 次のような等比数列の一般項を求めよ。また、第 6 項を求めよ。

(1) 初項 7, 公比 2

(2) 初項 1, 公比 $\frac{1}{4}$

(3) $-3, 3, -3, 3, \dots$

(4) $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{16}{27}, \dots$

4. 第 5 項が -48 , 第 7 項が -192 である等比数列の一般項を求めよ。

5. 初項が正である等比数列において、第 8 項が 32, 第 10 項が 8 である。この数列の初項と公比を求めよ。

6. 等比数列 $\{a_n\}$ について、 $a_2+a_3=6$, $a_4+a_5=54$ である。このとき、数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ。

7. 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 初項 1, 公比 3

(2) 初項 10, 公比 -2

(3) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

(4) $\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, 4+3\sqrt{2}, \dots$

8. 次のような等比数列の和を求めよ。

- (1) 初項 1, 公比 2, 末項 128
- (2) 初項 243, 公比 $-\frac{1}{3}$, 末項 3

9. 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。また, 初項から第 10 項までの和 S_{10} を求めよ。

- (1) 初項 7, 公比 2
- (2) 初項 20, 公比 -2
- (3) 5, -5 , 5, -5 , ……
- (4) 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, ……

10. 公比が負である等比数列において, 初項から第 3 項までの和が 9, 第 3 項から第 5 項までの和が 36 である。この数列の一般項を求めよ。

11. 第 3 項が 6, 初項から第 3 項までの和が 78 である等比数列の一般項を求めよ。

12. 次の等比数列で, 指定されたものを求めよ。

- (1) 初項が 5, 公比が 2, 初項から第 n 項までの和が 315 のとき n
- (2) 公比が 2, 初項から第 10 項までの和が -1023 のとき 初項 a
- (3) 初項が 1, 公比が 2, 初項から第 n 項までの和が 31 のとき n

1. 次のような等比数列の初めの 5 項を求めよ。

- (1) 初項 3, 公比 2
- (2) 初項 9, 公比 $-\frac{1}{3}$

【解答】 (1) 3, 6, 12, 24, 48 (2) 9, −3, 1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$

与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。

- (1) $a_1=3, a_2=2a_1=2\times3=6, a_3=2a_2=2\times6=12,$
 $a_4=2a_3=2\times12=24, a_5=2a_4=2\times24=48$
- (2) $a_1=9, a_2=-\frac{1}{3}a_1=-\frac{1}{3}\times9=-3,$
 $a_3=-\frac{1}{3}a_2=-\frac{1}{3}\times(-3)=1, a_4=-\frac{1}{3}a_3=-\frac{1}{3}\times1=-\frac{1}{3},$
 $a_5=-\frac{1}{3}a_4=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}$

2. 次の等比数列の公比を求めよ。また、 に適する数を求めよ。

- (1) 2, 6, 18, , , ……
- (2) , 2, $-2\sqrt{2}$, , ……

【解答】 (1) 公比 3, に適する数 : 54, 162

(2) 公比 $-\sqrt{2}$, に適する数 : $-\sqrt{2}$, 4

与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。

- (1) 公比を r とすると 初項 $\times r$ =第2項 なので $2r=6$ より $r=\frac{6}{2}=3$

よって $a_4=18\times3=54, a_5=54\times3=162$

- (2) 公比を r とすると 第2項 $\times r$ =第3項 なので

$2r=-2\sqrt{2}$ より $r=\frac{-2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

よって 初項 $\times r$ =第2項なので $a_1\times r=a_2$ つまり $a_1=\frac{a_2}{r}$ なので代入して

$a_1=\frac{2}{-\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2},$

また、第3項 $\times$ 公比 r =第4項なので $a_4=-2\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=4$

3. 次のような等比数列の一般項を求めよ。また、第 6 項を求めよ。

- (1) 初項 7, 公比 2
- (2) 初項 1, 公比 $\frac{1}{4}$
- (3) −3, 3, −3, 3, ……
- (4) $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{16}{27}, \dots\dots$

【解答】 一般項, 第 6 項の順に (1) $7\cdot2^{n-1}, 224$ (2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}, \frac{1}{1024}$

(3) $-3(-1)^{n-1}, 3$ (4) $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}, \frac{256}{243}$

与えられた数列の一般項を a_n とする。また、第6項は a_n の n に 6 を代入する

- (1) $a_n=7\cdot2^{n-1}$ よって $a_6=7\cdot2^{6-1}=7\cdot2^5=224$

(2) $a_n=1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ よって $a_6=\left(\frac{1}{4}\right)^{6-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{1024}$

(3) 公比は $-3\times r=3$ より $\frac{3}{-3}=-1$ であるから $a_n=-3(-1)^{n-1}$

よって $a_6=-3(-1)^5=3$

(4) 公比を r とすると 初項 $\times r$ =第2項 であるから $\frac{1}{4}r=\frac{1}{3}$ より $r=\frac{4}{3}$

ゆえに $a_n=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

よって $a_6=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^5=\frac{256}{243}$

4. 第 5 項が −48, 第 7 項が −192 である等比数列の一般項を求めよ。

【解答】 $-3\cdot2^{n-1}$ または $-3(-2)^{n-1}$

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし、その初項を a , 公比を r とする。

$a_5=-48$ であるから $ar^4=-48$ …… ①

$a_7=-192$ であるから $ar^6=-192$ …… ②

② から $ar^4\cdot r^2=-192$ ① を代入して $-48r^2=-192$

よって $r^2=4$ したがって $r=\pm2$

$r=2$ のとき①より $a\times2^4=-48$ から $16a=-48$ より $a=-3$

$r=-2$ のとき①より $a\times(-2)^4=-48$ から $16a=-48$ より $a=-3$

よって、求める一般項は $-3\cdot2^{n-1}$ または $-3(-2)^{n-1}$

5. 初項が正である等比数列において、第 8 項が 32, 第 10 項が 8 である。この数列の初項と公比を求めよ。

【解答】 初項 4096, 公比 $\frac{1}{2}$

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし、その初項を a , 公比を r とする。

$a_8=32$ であるから $ar^7=32$ …… ①

$a_{10}=8$ であるから $ar^9=8$ …… ②

② から $ar^7\cdot r^2=8$ ① を代入して $32r^2=8$

よって $r^2=\frac{1}{4}$ したがって $r=\pm\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$ のとき、① から $a\left(\frac{1}{2}\right)^7=32$ より $\frac{1}{128}a=32$ よって $a=4096$

このとき、「初項が正である」という題意を満たす。

$r=-\frac{1}{2}$ のとき、① から $a\left(-\frac{1}{2}\right)^7=32$ より $-\frac{1}{128}a=32$ よって $a=-4096$

このとき、「初項が正である」という題意を満たさず、不適。

以上から 初項は 4096, 公比は $\frac{1}{2}$

6. 等比数列 $\{a_n\}$ について、 $a_2+a_3=6, a_4+a_5=54$ である。このとき、数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ。

【解答】 初項 $\frac{1}{2}$, 公比 3 または 初項 1, 公比 −3

初項を a , 公比を r とする。

$a_2+a_3=6$ であるから $ar+ar^2=6$ …… ①

$a_4+a_5=54$ であるから $ar^3+ar^4=54$ …… ②

② から r^2 でくくって $(ar+ar^2)r^2=54$ ① を代入して $6r^2=54$

よって、 $r^2=9$ から $r=\pm3$

① から $r=3$ のとき $3a+9a=6$ ゆえに $a=\frac{1}{2}$

$r=-3$ のとき $-3a+9a=6$ ゆえに $a=1$

したがって 初項 $\frac{1}{2}$, 公比 3 または 初項 1, 公比 −3

7. 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

- (1) 初項 1, 公比 3
- (2) 初項 10, 公比 −2
- (3) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\dots$
- (4) $\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, 4+3\sqrt{2}, \dots\dots$

【解答】 (1) $S_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$ (2) $S_n=\frac{10}{3}\{1-(-2)^n\}$ (3) $S_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

(4) $S_n=(\sqrt{2}+1)^n-1$

(1) $S_n=\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)$

(2) $S_n=\frac{10\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{10}{3}\{1-(-2)^n\}$

(3) 初項は 1, 公比は $-\frac{1}{2}$ であるから

$S_n=\frac{1\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}}=\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\div\frac{3}{2}=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

【注意】 $\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ は $\frac{2}{3}\left\{1+\left(+\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ になりません！！

(4) 初項は $\sqrt{2}$, 公比 r は 初項 $\times r$ =第2項 なので

$\sqrt{2}\times r=2+\sqrt{2}$ より $r=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{(2+\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}+2}{2}=\sqrt{2}+1$

であるから

$S_n=\frac{\sqrt{2}\{(\sqrt{2}+1)^n-1\}}{(\sqrt{2}+1)-1}=\frac{\sqrt{2}\{(\sqrt{2}+1)^n-1\}}{\sqrt{2}}=(\sqrt{2}+1)^n-1$ (約分した)

8. 次のような等比数列の和を求めよ。

- (1) 初項 1, 公比 2, 末項 128
- (2) 初項 243, 公比 $-\frac{1}{3}$, 末項 3

【解答】 (1) 255 (2) 183

(1) 公式を使うため、項数を考える。

初項1, 公比2の等比数列において、128が第何項になるか考える。

初項 1, 公比 2 なので、一般項は $1\cdot2^{n-1}$ となる

よって128は $1 \cdot 2^{n-1} = 128$ より $2^{n-1} = 2^7$
ゆえに指数（肩の数字）を比較して
 $n - 1 = 7$ よって $n = 8$ つまり第8項である。
したがって、求める和は $\frac{1 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = \frac{256 - 1}{1} = 255$

(2) 公式を使うため、項数を考える。

初項 243、公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列において、3が第何項になるか考える。

初項 243、公比 $-\frac{1}{3}$ なので、一般項は $243 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ となる

項数を n とすると $243 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3$ 両辺243で割ると

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{81}$ となる。ここで $3^4 = 81$ なので $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$ より

ゆえに $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^4$

よって、指数（肩の数字）を比較して $n - 1 = 4$ から $n = 5$ つまり第5項である
したがって、求める和は

$$\begin{aligned} \frac{243\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^5\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} &= \frac{243\left\{1 - \left(-\frac{1}{243}\right)\right\}}{\frac{4}{3}} = 243\left(1 + \frac{1}{243}\right) \div \frac{4}{3} \\ &= 243\left(1 + \frac{1}{243}\right) \times \frac{3}{4} = 183 \end{aligned}$$

9. 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。また、初項から第 10 項までの和 S_{10} を求めよ。

(1) 初項 7、公比 2 (2) 初項 20、公比 -2

(3) 5、 -5 、5、 -5 、…… (4) 4、2、1、 $\frac{1}{2}$ 、……

【解答】 (1) $S_n = 7(2^n - 1)$ 、 $S_{10} = 7161$ (2) $S_n = \frac{20}{3}\{1 - (-2)^n\}$ 、 $S_{10} = -6820$

(3) $S_n = \frac{5}{2}\{1 - (-1)^n\}$ 、 $S_{10} = 0$ (4) $S_n = 8\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ 、 $S_{10} = \frac{1023}{128}$

【ヒント】 公式より S_n を n の式で表し、その n に 10 を代入すると S_{10} となる

(1) $S_n = \frac{7(2^n - 1)}{2 - 1} = 7(2^n - 1)$ 、 $S_{10} = 7(2^{10} - 1) = 7161$

(2) $S_n = \frac{20\{1 - (-2)^n\}}{1 - (-2)} = \frac{20}{3}\{1 - (-2)^n\}$ 、 $S_{10} = \frac{20}{3}\{1 - (-2)^{10}\} = -6820$

(3) 初項 5、公比 -1 の等比数列であるから

$$S_n = \frac{5\{1 - (-1)^n\}}{1 - (-1)} = \frac{5}{2}\{1 - (-1)^n\}, \quad S_{10} = \frac{5}{2}\{1 - (-1)^{10}\} = 0$$

(4) 初項 4、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$S_n = \frac{4\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{\frac{1}{2}} = 4\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \div \frac{1}{2} = 4\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \times \frac{2}{1} = 8\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\},$$

$$S_{10} = 8\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\} = \frac{1023}{128}$$

10. 公比が負である等比数列において、初項から第 3 項までの和が 9、第 3 項から第 5 項までの和が 36 である。この数列の一般項を求めよ。

【解答】 $3(-2)^{n-1}$

初項を a 、公比を r とすると、条件から

$$a + ar + ar^2 = 9 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$ar^2 + ar^3 + ar^4 = 36 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

② から $r^2(a + ar + ar^2) = 36$

① を代入して $9r^2 = 36$ よって $r^2 = 4$

問題文より $r < 0$ であるから $r = -2$

$r = -2$ を ① に代入すると $a - 2a + 4a = 9$

よって $a = 3$

したがって、求める一般項は $3(-2)^{n-1}$

11. 第 3 項が 6、初項から第 3 項までの和が 78 である等比数列の一般項を求めよ。

【解答】 $54 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ または $96 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

初項を a 、公比を r とすると、条件から

$$ar^2 = 6 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$a + ar + ar^2 = 78 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

② から $a(1 + r + r^2) = 78$

両辺に r^2 をかけて $ar^2(1 + r + r^2) = 78r^2$ すると ar^2 が現れるので

① を代入して $6(1 + r + r^2) = 78r^2$

よって $12r^2 - r - 1 = 0$ ゆえに、 $(3r - 1)(4r + 1) = 0$ から $r = \frac{1}{3}$ 、 $-\frac{1}{4}$

① から $r = \frac{1}{3}$ のとき $a\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6$ より $a = 54$

$r = -\frac{1}{4}$ のとき $a\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 6$ より $a = 96$

したがって、求める一般項は

$$54 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ または } 96 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

12. 次の等比数列で、指定されたものを求めよ。

(1) 初項が 5、公比が 2、初項から第 n 項までの和が 315 のとき n

(2) 公比が 2、初項から第 10 項までの和が -1023 のとき 初項 a

(3) 初項が 1、公比が 2、初項から第 n 項までの和が 31 のとき n

【解答】 (1) $n = 6$ (2) $a = -1$ (3) $n = 5$

(1) $\frac{5(2^n - 1)}{2 - 1} = 315$ から $2^n - 1 = 63$

よって $2^n = 64$ すなわち $2^n = 2^6$ したがって $n = 6$

(2) $\frac{a(2^{10} - 1)}{2 - 1} = -1023$ から $1023a = -1023$ よって $a = -1$

(3) $\frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 31$ から $2^n - 1 = 31$

よって $2^n = 32$ すなわち $2^n = 2^5$ したがって $n = 5$