数学演習（等差数列•等差数列の和）Ｈ２５．１．３０　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

1. 一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の初めの 5 項を求めよ。

(1) $a_n=4n-1$　　(2) $a_n=n^2-1$　　(3) $a_n=\dfrac{6}{n+4}$　　(4) $a_n=3(-2)^n$

2. 次の等差数列の公差を求めよ。また，$\boxed{}$ に適する数を求めよ。

(1) 2，5，8，$\boxed{}$，$\boxed{}$，……　　(2) 9，$\boxed{}$，5，3，$\boxed{}$，……

3. 次のような等差数列の一般項を求めよ。また，第 8 項を求めよ。

(1) 初項 7，公差 -4　　(2) -5，-2，1，4，……

4. 初項が 3，第 10 項が 30 である等差数列がある。この数列の公差および一般項を求めよ。

5. 公差が -3，第 8 項が 6 である等差数列 $\{a_n\}$ において，初項を求めよ。また，第 20 項を求めよ。

6. 第 3 項が 10，第 6 項が 22 である等差数列の初項は ${}^{ア}\boxed{}$，公差は ${}^{イ}\boxed{}$ である。
また，第 30 項は ${}^{ウ}\boxed{}$，50 は第 ${}^{エ}\boxed{}$ 項である。

7. 第 6 項が 33，第 11 項が 63 である等差数列において，第 16 項を求めよ。また，200 より大きくなるのは第何項からか。

8. 第 5 項が 20，第 8 項が 2 である等差数列がある。次の数のうち，この数列の項であるものはどれか。また，項であるものは第何項であるかを求めよ。

(1) 0　　(2) 8　　(3) 32　　(4) -20

9. 次のような等差数列の和を求めよ。

(1) 初項 8，末項 84，項数 20　　(2) 初項 80，末項 0，項数 17

10. 次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ。

(1)　5，x，11，……　　(2)　$x+1$，9，x^2-3，……

11. 次のような等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n および S_{10} を求めよ。

(1)　初項 1，公差 4　　(2)　初項 100，公差 -2

(3)　2，7，12，……　　(4)　50，46，42，……

12. 次の等差数列の和を求めよ。

(1)　2，5，8，……，50　　(2)　90，84，78，……，0

13. 次の等差数列の和を求めよ。

(1)　123，120，117，……，-24　　(2)　$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，……，$\frac{99}{5}$

14. 次の和を求めよ。

(1)　$1+2+3+\cdots\cdots+20$　　(2)　$1+3+5+\cdots\cdots+31$

15. ある等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_{10}=100$，$S_{20}=400$ であるとき，この数列の初項と公差を求めよ。

16. 1 から 100 までの整数について，次の和を求めよ。

(1)　4 の倍数の和　　(2)　4 の倍数でない数の和

17. 初項が -50，公差が 3 である等差数列において，初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n が初めて正となる n の値を求めよ。

18. 初項が 70，公差が -4 である等差数列において

(1)　第何項が初めて負になるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

1. 一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の初めの 5 項を求めよ。

(1)　$a_n=4n-1$　　(2)　$a_n=n^2-1$　　(3)　$a_n=\dfrac{6}{n+4}$　　(4)　$a_n=3(-2)^n$

解答　(1)　$a_1=3,\ a_2=7,\ a_3=11,\ a_4=15,\ a_5=19$

(2)　$a_1=0,\ a_2=3,\ a_3=8,\ a_4=15,\ a_5=24$

(3)　$a_1=\dfrac{6}{5},\ a_2=1,\ a_3=\dfrac{6}{7},\ a_4=\dfrac{3}{4},\ a_5=\dfrac{2}{3}$

(4)　$a_1=-6,\ a_2=12,\ a_3=-24,\ a_4=48,\ a_5=-96$

(1)　$a_1=4\cdot1-1=3,\ a_2=4\cdot2-1=7,\ a_3=4\cdot3-1=11,\ a_4=4\cdot4-1=15,$
$a_5=4\cdot5-1=19$

(2)　$a_1=1^2-1=0,\ a_2=2^2-1=3,\ a_3=3^2-1=8,\ a_4=4^2-1=15,\ a_5=5^2-1=24$

(3)　$a_1=\dfrac{6}{1+4}=\dfrac{6}{5},\ a_2=\dfrac{6}{2+4}=1,\ a_3=\dfrac{6}{3+4}=\dfrac{6}{7},$
$a_4=\dfrac{6}{4+4}=\dfrac{3}{4},\ a_5=\dfrac{6}{5+4}=\dfrac{2}{3}$

(4)　$a_1=3(-2)=-6,\ a_2=3(-2)^2=12,\ a_3=3(-2)^3=-24,\ a_4=3(-2)^4=48,$
$a_5=3(-2)^5=-96$

2. 次の等差数列の公差を求めよ。また，$\boxed{}$ に適する数を求めよ。

(1)　2，5，8，$\boxed{}$，$\boxed{}$，……　　(2)　9，$\boxed{}$，5，3，$\boxed{}$，……

解答　(1)　公差 3，$\boxed{}$ に適する数：11，14

(2)　公差 -2，$\boxed{}$ に適する数：7，1

与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。

(1)　公差は　$5-2=3$
よって　$a_4=8+3=11,\quad a_5=11+3=14$

(2)　公差は　$3-5=-2$
よって　$a_2=9+(-2)=7,\quad a_5=3+(-2)=1$

3. 次のような等差数列の一般項を求めよ。また，第 8 項を求めよ。

(1)　初項 7，公差 -4　　(2)　$-5,\ -2,\ 1,\ 4,$ ……

解答　一般項，第 8 項の順に　(1)　$-4n+11,\ -21$　(2)　$3n-8,\ 16$

(1)　一般項を a_n とすると　$a_n=7+(n-1)\times(-4)=-4n+11$
よって　$a_8=-4\cdot8+11=-21$

(2)　公差は　$-2-(-5)=3$
よって，一般項を a_n とすると　$a_n=-5+(n-1)\times3=3n-8$
したがって　$a_8=3\cdot8-8=16$

4. 初項が 3，第 10 項が 30 である等差数列がある。この数列の公差および一般項を求めよ。

解答　公差 3，一般項 $3n$

公差を d とすると，第 10 項が 30 であるから　$3+(10-1)\times d=30$
したがって　$d=3$　　すなわち，公差は　3
よって，一般項は　$3+(n-1)\times3=3n$

5. 公差が -3，第 8 項が 6 である等差数列 $\{a_n\}$ において，初項を求めよ。また，第 20 項を求めよ。

解答　初項 27，第 20 項 -30

初項を a とすると，$a_8=6$ であるから　$a+(8-1)\times(-3)=6$
よって　$a=27$
すなわち　初項は　27
したがって　$a_{20}=27+(20-1)\times(-3)=-30$

6. 第 3 項が 10，第 6 項が 22 である等差数列の初項は ア$\boxed{}$，公差は イ$\boxed{}$ である。
また，第 30 項は ウ$\boxed{}$，50 は第 エ$\boxed{}$ 項である。

解答　(ア)　2　(イ)　4　(ウ)　118　(エ)　13

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その初項を a，公差を d とする。
$a_3=10$ であるから　$a+2d=10$　…… ①
$a_6=22$ であるから　$a+5d=22$　…… ②
①，② を解いて　$a=2,\ d=4$
よって，初項は ア2，公差は イ4 である。
また，一般項 a_n は　$a_n=2+(n-1)\times4=4n-2$
したがって　$a_{30}=4\cdot30-2=$ ウ118
更に，$a_n=50$ とすると　$4n-2=50$　　よって　$n=13$
したがって，50 は 第 エ13 項 である。

7. 第 6 項が 33，第 11 項が 63 である等差数列において，第 16 項を求めよ。また，200 より大きくなるのは第何項からか。

解答　(前半)　93　(後半)　第 34 項

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その初項を a，公差を d とする。
$a_6=33$ であるから　$a+5d=33$　…… ①
$a_{11}=63$ であるから　$a+10d=63$　…… ②
①，② を解いて　$a=3,\ d=6$
よって　$a_n=3+(n-1)\times6=6n-3$
したがって　$a_{16}=6\cdot16-3=93$
また，$a_n>200$ とすると　$6n-3>200$　　よって　$n>\dfrac{203}{6}=33.8$……　…… ①
① を満たす最小の自然数 n は　$n=34$
よって，200 より大きくなるのは第 34 項からである。

8. 第 5 項が 20，第 8 項が 2 である等差数列がある。次の数のうち，この数列の項であるものはどれか。また，項であるものは第何項であるかを求めよ。

(1)　0　　(2)　8　　(3)　32　　(4)　-20

解答　(2)（第 7 項），(3)（第 3 項）

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その初項を a，公差を d とする。
$a_5=20$ であるから　$a+4d=20$　…… ①
$a_8=2$　であるから　$a+7d=2$　…… ②
①，② を解いて　$a=44,\ d=-6$
よって　$a_n=44+(n-1)\times(-6)=-6n+50$

(1)　$a_n=0$ とすると　$-6n+50=0$　…… ③
ここで，③ を満たす自然数 n はない。
したがって，0 は数列 $\{a_n\}$ の項ではない。

(2)　$a_n=8$ とすると　$-6n+50=8$
よって　$n=7$
したがって，8 は数列 $\{a_n\}$ の第 7 項である。

(3)　$a_n=32$ とすると　$-6n+50=32$
よって　$n=3$
したがって，32 は数列 $\{a_n\}$ の第 3 項である。

(4)　$a_n=-20$ とすると　$-6n+50=-20$　…… ④
ここで，④ を満たす自然数 n はない。
したがって，-20 は数列 $\{a_n\}$ の項ではない。

以上から　(2)（第 7 項）(3)（第 3 項）

9. 次のような等差数列の和を求めよ。

(1)　初項 8，末項 84，項数 20　　(2)　初項 80，末項 0，項数 17

解答　(1)　920　(2)　680

(1)　$\dfrac{1}{2}\cdot20(8+84)=920$　　(2)　$\dfrac{1}{2}\cdot17(80+0)=680$

10. 次の数列が等差数列であるとき，x の値を求めよ。

(1)　5，x，11，……　　(2)　$x+1$，9，x^2-3，……

解答　(1)　$x=8$　　(2)　$x=4,\ -5$

ヒント　等差中項の関係　a,b,c がこの順で等差数列ならば　$2\times b=a+c$　が成り立つ。

(1)　$2\times x=5+11$ から　$x=8$

別解　隣り合う 2 項の差が等しいから

$x-5=11-x$

これを解いて　$x=8$

(2)　$2\times 9=(x+1)+(x^2-3)$ から　$x^2+x-20=0$

よって　$(x-4)(x+5)=0$　したがって　$x=4,\ -5$

別解　隣り合う 2 項の差が等しいから

$9-(x+1)=(x^2-3)-9$

よって　$x^2+x-20=0$　これを解いて　$x=4,\ -5$

11. 次のような等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n および S_{10} を求めよ。

(1)　初項 1，公差 4　　(2)　初項 100，公差 -2

(3)　2，7，12，……　　(4)　50，46，42，……

解答　(1)　$S_n=n(2n-1)$，$S_{10}=190$　　(2)　$S_n=-n(n-101)$，$S_{10}=910$

(3)　$S_n=\dfrac{n(5n-1)}{2}$，$S_{10}=245$　　(4)　$S_n=-2n(n-26)$，$S_{10}=320$

(1)　$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot1+(n-1)\cdot4\}=n(2n-1)$

よって　$S_{10}=10(2\cdot10-1)=190$

(2)　$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot100+(n-1)\cdot(-2)\}=-n(n-101)$

よって　$S_{10}=-10(10-101)=910$

(3)　初項は 2，公差は 5 であるから

$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot2+(n-1)\cdot5\}=\dfrac{n(5n-1)}{2}$

よって　$S_{10}=\dfrac{10(5\cdot10-1)}{2}=245$

(4)　初項は 50，公差は -4 であるから

$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot50+(n-1)\cdot(-4)\}=-2n(n-26)$

よって　$S_{10}=-2\cdot10(10-26)=320$

12. 次の等差数列の和を求めよ。

(1)　2，5，8，……，50　　(2)　90，84，78，……，0

解答　(1)　442　　(2)　720

(1)　初項は 2，公差は 3 であるから，項数を n とすると

$2+(n-1)\cdot3=50$　よって　$n=17$

したがって，求める和は　$\dfrac{1}{2}\cdot17(2+50)=442$

(2)　初項は 90，公差は -6 であるから，項数を n とすると

$90+(n-1)\cdot(-6)=0$　よって　$n=16$

したがって，求める和は　$\dfrac{1}{2}\cdot16(90+0)=720$

13. 次の等差数列の和を求めよ。

(1)　123，120，117，……，-24　　(2)　$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{3}{5}$，……，$\dfrac{99}{5}$

解答　(1)　2475　　(2)　990

(1)　初項は 123，公差は -3 であるから，項数を n とすると

$123+(n-1)\cdot(-3)=-24$　よって　$n=50$

したがって，求める和は　$\dfrac{1}{2}\cdot50\{123+(-24)\}=2475$

(2)　$\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}+\cdots\cdots+\dfrac{99}{5}=\dfrac{1}{5}(1+2+3+\cdots\cdots+99)=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2}\cdot99(99+1)$

$=990$

14. 次の和を求めよ。

(1)　$1+2+3+\cdots\cdots+20$　　(2)　$1+3+5+\cdots\cdots+31$

解答　(1)　210　　(2)　256

(1)　初項1,末項20,項数20の等差数列の和なので

$1+2+3+\cdots\cdots+20=\dfrac{1}{2}\cdot20(20+1)=210$

(2)　初項1，公差2の等差数列で末項31である。一般項は$1+(n-1)\cdot2=2n-1$より

$2n-1=31$　から　$n=16$　つまりこの数列の項数は　16

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot16(1+31)=256$

別解　$1+3+5+\cdots\cdots+31=1+3+5+\cdots\cdots+(2\cdot16-1)$

$=16^2=256$

15. ある等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_{10}=100$，$S_{20}=400$ であるとき，この数列の初項と公差を求めよ。

解答　初項 1，公差 2

初項を a，公差を d とする。

$S_{10}=100$ であるから　$\dfrac{1}{2}\cdot10(2a+9d)=100$　よって　$2a+9d=20$　…… ①

$S_{20}=400$ であるから　$\dfrac{1}{2}\cdot20(2a+19d)=400$　よって　$2a+19d=40$　…… ②

①，② を解いて　$a=1$，$d=2$

したがって　初項は 1，公差は 2

16. 1 から 100 までの整数について，次の和を求めよ。

(1)　4 の倍数の和　　(2)　4 の倍数でない数の和

解答　(1)　1300　　(2)　3750

(1)　求める和は，初項4，末項100,項数25の等差数列の和なので

$S=\dfrac{1}{2}\cdot25(4+100)=1300$

別解　$4+8+12+\cdots\cdots+100=4(1+2+3+\cdots\cdots+25)$

$=4\times\dfrac{1}{2}\cdot25(25+1)$

$=1300$

(2)　求める和は

$1+2+3+\cdots\cdots+100-(4+8+12+\cdots\cdots+100)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot100(100+1)-1300=5050-1300$

$=3750$

17. 初項が -50，公差が 3 である等差数列において，初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n が初めて正となる n の値を求めよ。

解答　$n=35$

$S_n=\dfrac{1}{2}\cdot n\{2\cdot(-50)+(n-1)\cdot3\}=\dfrac{1}{2}n(3n-103)$

$S_n>0$ とすると　$\dfrac{1}{2}n(3n-103)>0$…(※)

$n>0$ であるから(※)式の両辺をnで割って　$3n-103>0$

よって　$n>\dfrac{103}{3}=34.3\cdots\cdots$　…… ②

② を満たす最小の自然数 n は　$n=35$

すなわち，$n=35$ のとき S_n が初めて正となる。

18. 初項が 70，公差が -4 である等差数列において

(1)　第何項が初めて負になるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

解答　(1)　第 19 項　　(2)　第 18 項，和 648

一般項を a_n とすると　$a_n=70+(n-1)\times(-4)=74-4n$

(1)　$a_n<0$ とすると　$74-4n<0$　よって　$n>\dfrac{37}{2}=18.5$　…… ①

① を満たす最小の自然数 n は　$n=19$

したがって，第 19 項が初めて負になる。

(2)　(1) の結果から　$a_1>0$，$a_2>0$，……，$a_{18}>0$，$a_{19}<0$，$a_{20}<0$，……

よって，正のものだけ足せばいいので，初項から第 18 項までの和が最大となる。

また，そのときの和は　$\dfrac{1}{2}\cdot18\{2\cdot70+(18-1)\cdot(-4)\}=648$