数学演習（等差数列の和・等比数列の和）Ｈ２２．６．１１　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

1．次のような等差数列の和を求めよ。

(1)　初項 8，末項 84，項数 20　　(2)　初項 80，末項 0，項数 17

2．次のような等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n および S_{10} を求めよ。

(1)　初項 1，公差 4　　(2)　初項 100，公差 -2

(3)　2，7，12，……　　(4)　50，46，42，……

3．次の等差数列の和を求めよ。

(1)　2，5，8，……，50　　(2)　90，84，78，……，0

4．次の等差数列の和を求めよ。

(1)　123，120，117，……，-24　　(2)　$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，……，$\frac{99}{5}$

5．1 から 100 までの整数について，次の和を求めよ。

(1)　4 の倍数の和　　(2)　4 の倍数でない数の和

6．20 から 200 までの整数のうち，次のような数の和を求めよ。

(1)　5 の倍数　　(2)　5 で割り切れない数　　(3)　6 で割ると 4 余る数

7．ある等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_{10}=100$，$S_{20}=400$ であるとき，この数列の初項と公差を求めよ。

8．初項が 70，公差が -4 である等差数列において

(1)　第何項が初めて負になるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

9．初項が -50，公差が 3 である等差数列において，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1)　第何項が初めて正になるか。

(2)　S_n が最小となる n の値を求めよ。

(3)　S_n が初めて正となる n の値を求めよ。

10. 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 初項 1，公比 3　　(2) 初項 10，公比 -2

(3) $1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots\cdots$　　(4) $\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2},\ 4+3\sqrt{2},\ \cdots\cdots$

11. 次のような等比数列の和を求めよ。

(1) 初項 1，公比 2，末項 128　　(2) 初項 243，公比 $-\dfrac{1}{3}$，末項 3

12. 1 日目に 10 円，2 日目に 30 円，3 日目に 90 円，…… というように，前の日の 3 倍の金額を貯金箱に入れていくと，1 週間でいくら貯金することができるか。

13. 初項が 5，公比が 2 である等比数列において，第 5 項から第 10 項までの和を求めよ。

14. 公比が負である等比数列において，初項から第 3 項までの和が 9，第 3 項から第 5 項までの和が 36 である。この数列の一般項を求めよ。

15. 第 3 項が 6，初項から第 3 項までの和が 78 である等比数列の一般項を求めよ。

16. (1) 公比が -3，初項から第 6 項までの和が 728 である等比数列の初項を求めよ。

(2) 初項が 2，公比が 3，和が 242 である等比数列の項数を求めよ。

(3) 初項 a，公比 r がともに実数の等比数列について，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_3=31$，$S_6=3906$ であった。このとき a，r の値を求めよ。

17. 初項から第 6 項までの和が 3，初項から第 12 項までの和が 9 である等比数列において，初項から第 18 項までの和を求めよ。

1．次のような等差数列の和を求めよ。

(1)　初項 8，末項 84，項数 20　　(2)　初項 80，末項 0，項数 17

解答　(1)　920　　(2)　680

解説

(1)　$\frac{1}{2}\cdot 20(8+84)=920$

(2)　$\frac{1}{2}\cdot 17(80+0)=680$

2．次のような等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n および S_{10} を求めよ。

(1)　初項 1，公差 4　　(2)　初項 100，公差 -2

(3)　2，7，12，……　　(4)　50，46，42，……

解答　(1)　$S_n=n(2n-1)$，$S_{10}=190$　　(2)　$S_n=-n(n-101)$，$S_{10}=910$

(3)　$S_n=\frac{n(5n-1)}{2}$，$S_{10}=245$　　(4)　$S_n=-2n(n-26)$，$S_{10}=320$

解説

(1)　$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 1+(n-1)\cdot 4\}=n(2n-1)$

よって　$S_{10}=10(2\cdot 10-1)=190$

(2)　$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 100+(n-1)\cdot(-2)\}=-n(n-101)$

よって　$S_{10}=-10(10-101)=910$

(3)　初項は 2，公差は 5 であるから

$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 2+(n-1)\cdot 5\}=\frac{n(5n-1)}{2}$

よって　$S_{10}=\frac{10(5\cdot 10-1)}{2}=245$

(4)　初項は 50，公差は -4 であるから

$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 50+(n-1)\cdot(-4)\}=-2n(n-26)$

よって　$S_{10}=-2\cdot 10(10-26)=320$

3．次の等差数列の和を求めよ。

(1)　2，5，8，……，50　　(2)　90，84，78，……，0

解答　(1)　442　　(2)　720

解説

(1)　初項は 2，公差は 3 であるから，項数を n とすると

$2+(n-1)\cdot 3=50$　　よって　$n=17$

したがって，求める和は　$\frac{1}{2}\cdot 17(2+50)=442$

(2)　初項は 90，公差は -6 であるから，項数を n とすると

$90+(n-1)\cdot(-6)=0$　　よって　$n=16$

したがって，求める和は　$\frac{1}{2}\cdot 16(90+0)=720$

4．次の等差数列の和を求めよ。

(1)　123，120，117，……，-24　　(2)　$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，……，$\frac{99}{5}$

解答　(1)　2475　　(2)　990

解説

(1)　初項は 123，公差は -3 であるから，項数を n とすると

$123+(n-1)\cdot(-3)=-24$　　よって　$n=50$

したがって，求める和は　$\frac{1}{2}\cdot 50\{123+(-24)\}=2475$

(2)　$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\cdots\cdots+\frac{99}{5}=\frac{1}{5}(1+2+3+\cdots\cdots+99)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\cdot 99(99+1)$

$=990$

5．1 から 100 までの整数について，次の和を求めよ。

(1)　4 の倍数の和　　(2)　4 の倍数でない数の和

解答　(1)　1300　　(2)　3750

解説

(1)　求める和は

$4+8+12+\cdots\cdots+100=4(1+2+3+\cdots\cdots+25)$

$=4\times\frac{1}{2}\cdot 25(25+1)$

$=1300$

(2)　求める和は

$1+2+3+\cdots\cdots+100-(4+8+12+\cdots\cdots+100)$

$=\frac{1}{2}\cdot 100(100+1)-1300=5050-1300$

$=3750$

6．20 から 200 までの整数のうち，次のような数の和を求めよ。

(1)　5 の倍数　　(2)　5 で割り切れない数　　(3)　6 で割ると 4 余る数

解答　(1)　4070　　(2)　15840　　(3)　3270

解説

(1)　20 から 200 までの整数のうち，5 の倍数を順に並べると

5×4，5×5，……，5×40

これは初項 20，末項 200，項数 $40-4+1=37$ の等差数列であるから，求める和は

$\frac{1}{2}\cdot 37(20+200)=4070$

(2)　20 から 200 までの整数全体の和は，初項 20，末項 200，項数 $200-20+1=181$ の等差数列の和であるから　$\frac{1}{2}\cdot 181(20+200)=19910$

よって，求める和は　$19910-4070=15840$

(3)　20 から 200 までの整数のうち，6 で割ると 4 余る数を順に並べると

$6\times 3+4$，$6\times 4+4$，……，$6\times 32+4$

これは初項 22，末項 196，項数 $32-3+1=30$ の等差数列であるから，求める和は

$\frac{1}{2}\cdot 30(22+196)=3270$

7．ある等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_{10}=100$，$S_{20}=400$ であるとき，この数列の初項と公差を求めよ。

解答　初項 1，公差 2

解説

初項を a，公差を d とする。

$S_{10}=100$ であるから　$\frac{1}{2}\cdot 10(2a+9d)=100$　　よって　$2a+9d=20$　……①

$S_{20}=400$ であるから　$\frac{1}{2}\cdot 20(2a+19d)=400$　　よって　$2a+19d=40$　……②

①，② を解いて　$a=1$，$d=2$

したがって　初項は 1，公差は 2

8．初項が 70，公差が -4 である等差数列において

(1)　第何項が初めて負になるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

解答　(1)　第 19 項　　(2)　第 18 項，和 648

解説

一般項を a_n とすると　$a_n=70+(n-1)\times(-4)=74-4n$

(1)　$a_n<0$ とすると　$74-4n<0$　　よって　$n>\frac{37}{2}=18.5$　……①

① を満たす最小の自然数 n は　$n=19$

したがって，第 19 項が初めて負になる。

(2)　(1) の結果から　$a_1>0$，$a_2>0$，……，$a_{18}>0$，$a_{19}<0$，$a_{20}<0$，……

よって，初項から第 18 項までの和が最大となる。

また，そのときの和は　$\frac{1}{2}\cdot 18\{2\cdot 70+(18-1)\cdot(-4)\}=648$

9．初項が -50，公差が 3 である等差数列において，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1)　第何項が初めて正になるか。

(2)　S_n が最小となる n の値を求めよ。

(3)　S_n が初めて正となる n の値を求めよ。

解答　(1)　第 18 項　　(2)　$n=17$　　(3)　$n=35$

解説

一般項を a_n とすると　$a_n=-50+(n-1)\times 3=3n-53$

(1)　$a_n>0$ とすると　$3n-53>0$　　よって　$n>\frac{53}{3}=17.6\cdots\cdots$　……①

① を満たす最小の自然数 n は　$n=18$

したがって，　第 18 項 が初めて正となる。

(2)　(1) の結果から　$a_1<0$，$a_2<0$，……，$a_{17}<0$，$a_{18}>0$，$a_{19}>0$，……

よって，初項から第 17 項までの和 S_{17} が最小となる。

すなわち，$n=17$ のとき S_n が最小となる。

(3)　$S_n=\frac{1}{2}\cdot n\{2\cdot(-50)+(n-1)\cdot 3\}=\frac{1}{2}n(3n-103)$

$S_n>0$ とすると　$\frac{1}{2}n(3n-103)>0$　　$n>0$ であるから　$3n-103>0$

よって　$n>\frac{103}{3}=34.3\cdots\cdots$　……②

② を満たす最小の自然数 n は　$n=35$

すなわち，$n=35$ のとき S_n が初めて正となる。

10. 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　初項 1，公比 3　　(2)　初項 10，公比 -2

(3)　$1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots\cdots$　　(4)　$\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2},\ 4+3\sqrt{2},\ \cdots\cdots$

解答　(1)　$S_n=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$　(2)　$S_n=\dfrac{10}{3}\{1-(-2)^n\}$　(3)　$S_n=\dfrac{2}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

(4)　$S_n=(\sqrt{2}+1)^n-1$

解説

(1)　$S_n=\dfrac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$

(2)　$S_n=\dfrac{10\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\dfrac{10}{3}\{1-(-2)^n\}$

(3)　初項は 1，公比は $-\dfrac{1}{2}\div 1=-\dfrac{1}{2}$ であるから

$$S_n=\frac{1\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

(4)　初項は $\sqrt{2}$，公比は $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$ であるから

$$S_n=\frac{\sqrt{2}\{(\sqrt{2}+1)^n-1\}}{(\sqrt{2}+1)-1}=(\sqrt{2}+1)^n-1$$

11. 次のような等比数列の和を求めよ。

(1)　初項 1，公比 2，末項 128　　(2)　初項 243，公比 $-\dfrac{1}{3}$，末項 3

解答　(1)　255　(2)　183

解説

(1)　項数を n とすると　$1\cdot 2^{n-1}=128$　よって　$2^{n-1}=2^7$

ゆえに　$n-1=7$　よって　$n=8$

したがって，求める和は　$\dfrac{1\cdot(2^8-1)}{2-1}=255$

(2)　項数を n とすると　$243\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=3$　よって　$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{81}$

ゆえに　$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^4$　よって，$n-1=4$ から　$n=5$

したがって，求める和は　$\dfrac{243\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^5\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\dfrac{3}{4}\cdot 243\left(1+\dfrac{1}{243}\right)=183$

別解　初項 a，公比 r の等比数列の第 n 項を l とすると，初項から第 n 項までの和は

$$\frac{a-rl}{1-r}$$

これを用いると　(1)　$\dfrac{1-2\cdot 128}{1-2}=255$　(2)　$\dfrac{243-\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 3}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\dfrac{3}{4}\cdot 244=183$

12. 1 日目に 10 円，2 日目に 30 円，3 日目に 90 円，…… というように，前の日の 3 倍の金額を貯金箱に入れていくと，1 週間でいくら貯金することができるか。

解答　10930 円

解説

1 日目に 10 円，2 日目に $10\cdot 3$ 円，3 日目に $10\cdot 3^2$ 円，……，7 日目に $10\cdot 3^6$ 円を貯金箱に入れるから

$$10+10\cdot 3+10\cdot 3^2+\cdots\cdots+10\cdot 3^6=\frac{10(3^7-1)}{3-1}$$
$$=10930\ (円)$$

13. 初項が 5，公比が 2 である等比数列において，第 5 項から第 10 項までの和を求めよ。

解答　5040

解説

初項から第 n 項までの和を S_n とすると　$S_n=\dfrac{5(2^n-1)}{2-1}=5(2^n-1)$

よって，求める和は

$$S_{10}-S_4=5(2^{10}-1)-5(2^4-1)=5(2^{10}-2^4)=5040$$

別解　一般項を a_n とすると　$a_n=5\cdot 2^{n-1}$

よって，第 5 項から第 10 項までを順に並べると

$5\cdot 2^4,\ 5\cdot 2^5,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot 2^9$

したがって，求める和は初項 $5\cdot 2^4$，公比 2，項数 6 の等比数列の和であるから

$$\frac{5\cdot 2^4(2^6-1)}{2-1}=5040$$

14. 公比が負である等比数列において，初項から第 3 項までの和が 9，第 3 項から第 5 項までの和が 36 である。この数列の一般項を求めよ。

解答　$3(-2)^{n-1}$

解説

初項を a，公比を r とすると，条件から

$a+ar+ar^2=9$　…… ①

$ar^2+ar^3+ar^4=36$　…… ②

② から　$r^2(a+ar+ar^2)=36$

① を代入して　$9r^2=36$　よって　$r^2=4$

$r<0$ であるから　$r=-2$

$r=-2$ を ① に代入すると　$a-2a+4a=9$

よって　$a=3$

したがって，求める一般項は　$3(-2)^{n-1}$

15. 第 3 項が 6，初項から第 3 項までの和が 78 である等比数列の一般項を求めよ。

解答　$54\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ または $96\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

解説

初項を a，公比を r とすると，条件から

$ar^2=6$　…… ①

$a+ar+ar^2=78$　…… ②

② から　$a(1+r+r^2)=78$

両辺に r^2 をかけて　$ar^2(1+r+r^2)=78r^2$

① を代入して　$6(1+r+r^2)=78r^2$

よって　$12r^2-r-1=0$　ゆえに，$(3r-1)(4r+1)=0$ から　$r=\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{4}$

① から　$r=\dfrac{1}{3}$ のとき　$a=54$　$r=-\dfrac{1}{4}$ のとき　$a=96$

したがって，求める一般項は

$$54\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\ または\ 96\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

16. (1)　公比が -3，初項から第 6 項までの和が 728 である等比数列の初項を求めよ。

(2)　初項が 2，公比が 3，和が 242 である等比数列の項数を求めよ。

(3)　初項 a，公比 r がともに実数の等比数列について，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_3=31$，$S_6=3906$ であった。このとき a，r の値を求めよ。

解答　(1)　-4　(2)　5　(3)　$a=1,\ r=5$

解説

(1)　初項を a とすると，条件から　$\dfrac{a\{1-(-3)^6\}}{1-(-3)}=728$

よって，$a(1-729)=4\cdot 728$ から　$a=-4$

(2)　項数を n とすると，条件から　$\dfrac{2(3^n-1)}{3-1}=242$

ゆえに　$3^n-1=242$　すなわち　$3^n=3^5$

したがって，項数は　$n=5$

(3)　$r=1$ のとき　$S_3=3a$，$S_6=6a$

$3a=31$，$6a=3906$ を同時に満たす a は存在しないから不適。

$r\neq 1$ のとき，$S_3=31$ から　$\dfrac{a(r^3-1)}{r-1}=31$　…… ①

また，$S_6=3906$ から　$\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=3906$　…… ②

② から　$\dfrac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=3906$

これに ① を代入すると　$31(r^3+1)=3906$

よって　$r^3=125$　r は実数であるから　$r=5$

$r=5$，① から　$a=1$

17. 初項から第 6 項までの和が 3，初項から第 12 項までの和が 9 である等比数列において，初項から第 18 項までの和を求めよ。

解答　21

解説

初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ とすると，$S_6=6a$，$S_{12}=12a$ となり，$S_6=3$，$S_{12}=9$ であるから

$6a=3$　…… ①，　$12a=9$　…… ②

ここで，①，② をともに満たす a は存在しないから　$r\neq 1$

よって　$S_6=\dfrac{a(1-r^6)}{1-r}$，　$S_{12}=\dfrac{a(1-r^{12})}{1-r}$

ゆえに　$\dfrac{a(1-r^6)}{1-r}=3$　…… ③，　$\dfrac{a(1-r^{12})}{1-r}=9$　…… ④

$1-r^{12}=1^2-(r^6)^2$ であるから，④ より　$\dfrac{a(1-r^6)(1+r^6)}{1-r}=9$

③ を代入して　$3(1+r^6)=9$　よって　$r^6=2$

$r^6=2$ を ③ に代入すると　$\dfrac{a(1-2)}{1-r}=3$　ゆえに　$\dfrac{a}{1-r}=-3$

したがって　$S_{18}=\dfrac{a(1-r^{18})}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}\{1-(r^6)^3\}=-3(1-2^3)=21$