数学演習（群数列）R１．１１．２５　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 奇数の数列を $1 \mid 3,\ 5 \mid 7,\ 9,\ 11 \mid 13,\ 15,\ 17,\ 19 \mid 21,\ \cdots\cdots$ のように，第 n 群が n 個の数を含むように分けるとき

(1) 第 n 群の最初の奇数を求めよ。　(2) 第 n 群の総和を求めよ。

(3) 301 は第何群の何番目に並ぶ数か。

$\boxed{2}$ $\frac{1}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{6}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{8}{4},\ \frac{9}{4},\ \frac{10}{4},\ \frac{11}{5},\ \cdots\cdots$ の分数の数列について，初項から第 210 項までの和を求めよ。

$\boxed{3}$ 自然数 1，2，3，…… を，右の図のように並べる。

(1) 左から m 番目，上から m 番目の位置にある自然数を m を用いて表せ。

(2) 150 は左から何番目，上から何番目の位置にあるか。

1	2	5	10	17	…
4	3	6	11	18	…
9	8	7	12	…	…
16	15	14	13	…	…
…	…	…	…	…	…

$\boxed{4}$ 自然数 n に対して $m \leqq \log_2 n < m+1$ を満たす整数 m を a_n で表すことにする。このとき $a_{2020}=$ ア$\boxed{}$ である。また，自然数 k に対して $a_n=k$ を満たす n は全部で イ$\boxed{}$ 個あり，そのような n のうちで最大のものは $n=$ ウ$\boxed{}$ である。更に，$\sum_{n=1}^{2020} a_n=$ エ$\boxed{}$ である。

$\boxed{5}$ 数列 1，1，3，1，3，5，1，3，5，7，1，3，5，7，9，1，…… について，次の問いに答えよ。ただし，k，m，n は自然数とする。

(1) $(k+1)$ 回目に現れる 1 は第何項か。

(2) m 回目に現れる 17 は第何項か。

(3) 初項から $(k+1)$ 回目の 1 までの項の和を求めよ。

(4) 初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，$S_n>1300$ となる最小の n を求めよ。

$\boxed{6}$ 数列 $\{a_n\}$ が $a_n=(-1)^{n+1}n^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定義され，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする。また，m は自然数とする。

(1) $a_{2k-1}+a_{2k}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ m)$ を k を用いて表せ。

(2) $n=2m$ のときの S_{2m}，$n=2m-1$ のときの S_{2m-1} を m を用いて表せ。

(3) $S_n=\boxed{}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ と表される。

1 奇数の数列を $1 \mid 3,\ 5 \mid 7,\ 9,\ 11 \mid 13,\ 15,\ 17,\ 19 \mid 21,\ \cdots\cdots$ のように，第 n 群が n 個の数を含むように分けるとき

(1)　第 n 群の最初の奇数を求めよ。　　(2)　第 n 群の総和を求めよ。

(3)　301 は第何群の何番目に並ぶ数か。

解答　(1)　n^2-n+1　　(2)　n^3　　(3)　第 17 群の 15 番目

解説

(1)　$n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までにある奇数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n$$

よって，第 n 群の最初の奇数は $\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$ 番目の奇数で

$$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-1=n^2-n+1$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

(2)　(1) より，第 n 群は初項 n^2-n+1，公差 2，項数 n の等差数列をなす。

よって，その総和は

$$\frac{1}{2}n\{2\cdot(n^2-n+1)+(n-1)\cdot 2\}=n^3$$

(3)　301 が第 n 群に含まれるとすると

$$n^2-n+1 \leqq 301 < (n+1)^2-(n+1)+1$$

よって　$n(n-1) \leqq 300 < (n+1)n$　……①

$n(n-1)$ は単調に増加し，$17\cdot 16=272$，$18\cdot 17=306$ であるから，① を満たす自然数 n は　$n=17$

301 が第 17 群の m 番目であるとすると

$$(17^2-17+1)+(m-1)\cdot 2=301 \qquad \text{これを解いて} \qquad m=15$$

したがって，301 は第 17 群の 15 番目に並ぶ数である。

別解　(前半)　$2k-1=301$ から　$k=151$

よって，301 はもとの数列において，151 番目の奇数である。

301 が第 n 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}n(n-1) < 151 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$$

ゆえに　$n(n-1) < 302 \leqq n(n+1)$

これを満たす自然数 n は，上の解答と同様にして　$n=17$

2 $\frac{1}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{6}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{8}{4},\ \frac{9}{4},\ \frac{10}{4},\ \frac{11}{5},\ \cdots\cdots$ の分数の数列について，初項から第 210 項までの和を求めよ。

解答　1445

解説

分母が等しいものを群として，次のように区切って考える。

$$\frac{1}{1}\ \Big|\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2}\ \Big|\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{6}{3}\ \Big|\ \frac{7}{4},\ \frac{8}{4},\ \frac{9}{4},\ \frac{10}{4}\ \Big|\ \frac{11}{5},\ \cdots\cdots$$

第 1 群から第 n 群までの項数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

第 210 項が第 n 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n < 210 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$$

よって　$(n-1)n < 420 \leqq n(n+1)$　……①

$(n-1)n$ は単調に増加し，$19\cdot 20=380$，$20\cdot 21=420$ であるから，① を満たす自然数 n は　$n=20$

また，第 210 項は分母が 20 である分数のうちで最後の数である。

ここで，第 n 群に含まれるすべての数の和は

$$\frac{1}{2}n\left[2\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}+(n-1)\cdot 1\right]\div n=\frac{n^2+1}{2}$$

ゆえに，求める和は

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{k^2+1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{20}k^2+\sum_{k=1}^{20}1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{20\cdot 21\cdot 41}{6}+20\right)=1445$$

3 自然数 1，2，3，…… を，右の図のように並べる。

(1)　左から m 番目，上から m 番目の位置にある自然数を m を用いて表せ。

(2)　150 は左から何番目，上から何番目の位置にあるか。

1	2	5	10	17	…
4	3	6	11	18	…
9	8	7	12	…	…
16	15	14	13	…	…
…	…	…	…	…	…

解答　(1)　m^2-m+1　　(2)　左から 13 番目，上から 6 番目

解説

並べられた自然数を，次のように群に分けて考える。

$$1 \mid 2,\ 3,\ 4 \mid 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \mid 10,\ 11,\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots ①$$

(1)　① の第 1 群から第 m 群までの項数は

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2m-1)=m^2$$

左から m 番目，上から m 番目は，① の第 m 群の m 番目の位置にあるから

$$(m-1)^2+m=m^2-m+1$$

(2)　150 が第 m 群に含まれるとすると

$$(m-1)^2 < 150 \leqq m^2$$

$12^2 < 150 < 13^2$ から，この不等式を満たす自然数 m は　$m=13$

第 12 群までの項数は $12^2=144$ であるから，150 は第 13 群の $150-144=6$ (番目) である。

また，第 13 群の中央の数は 13 番目の項で　$6<13$

よって，150 は左から 13 番目，上から 6 番目の位置にある。

4 自然数 n に対して $m \leqq \log_2 n < m+1$ を満たす整数 m を a_n で表すことにする。このとき $a_{2020}=$ ア $\boxed{}$ である。また，自然数 k に対して $a_n=k$ を満たす n は全部で イ $\boxed{}$ 個あり，そのような n のうちで最大のものは $n=$ ウ $\boxed{}$ である。更に，$\displaystyle\sum_{n=1}^{2020}a_n=$ エ $\boxed{}$ である。

解答　(ア)　10　　(イ)　2^k　　(ウ)　$2^{k+1}-1$　　(エ)　18164

解説

$2^{10}=1024$，$2^{11}=2048$ であるから　$2^{10}<2020<2^{11}$

各辺の 2 を底とする対数をとると　$10<\log_2 2020<11$

よって　$a_{2020}=$ ア 10

$a_n=k$ のとき　$k \leqq \log_2 n < k+1$

ゆえに　$2^k \leqq n < 2^{k+1}$　……①

① を満たす自然数 n の個数は　$(2^{k+1}-1)-2^k+1=$ イ 2^k (個)

① を満たす最大の自然数 n は　$n=$ ウ $2^{k+1}-1$

また，$\log_2 1=0$ から $a_1=0$ である。

$$\text{よって}\quad \sum_{n=1}^{2020}a_n=a_1+\sum_{k=1}^{9}(a_{2^k}+\cdots\cdots+a_{2^{k+1}-1})+(a_{2^{10}}+a_{2^{10}+1}+\cdots\cdots+a_{2020})$$

$$=0+\sum_{k=1}^{9}k\cdot 2^k+10(2020-2^{10}+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{9}k\cdot 2^k+9970$$

ここで，$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}k\cdot 2^k$ とすると

$$S=1\cdot 2+2\cdot 2^2+\cdots\cdots+9\cdot 2^9$$

両辺に 2 を掛けると

$$2S=\qquad 1\cdot 2^2+\cdots\cdots+8\cdot 2^9+9\cdot 2^{10}$$

辺々を引くと

$$-S=1\cdot 2+(2^2+\cdots\cdots+2^9)-9\cdot 2^{10}$$

$$=2+\frac{2^2(2^8-1)}{2-1}-9\cdot 2^{10}=-8\cdot 2^{10}-2=-8194$$

ゆえに，$S=8194$ であるから　$\displaystyle\sum_{n=1}^{2020}a_n=8194+9970=$ エ 18164

5 数列 1，1，3，1，3，5，1，3，5，7，1，3，5，7，9，1，…… について，次の問いに答えよ。ただし，k，m，n は自然数とする。

(1)　$(k+1)$ 回目に現れる 1 は第何項か。

(2)　m 回目に現れる 17 は第何項か。

(3)　初項から $(k+1)$ 回目の 1 までの項の和を求めよ。

(4)　初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，$S_n>1300$ となる最小の n を求めよ。

解答　(1)　第 $\frac{1}{2}(k^2+k+2)$ 項　　(2)　第 $\frac{1}{2}(m^2+15m+74)$ 項

(3)　$\frac{1}{6}(k+2)(2k^2-k+3)$　　(4)　$n=128$

解説

与えられた数列を

$$1 \mid 1,\ 3 \mid 1,\ 3,\ 5 \mid 1,\ 3,\ 5,\ 7 \mid 1,\ \cdots\cdots$$

のように，第 k 群に k 個の項が含まれるように群に分ける。

(1)　$(k+1)$ 回目に現れる 1 は，第 $(k+1)$ 群の最初の項である。

第 1 群から第 k 群までの項数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+k=\sum_{i=1}^{k}i=\frac{1}{2}k(k+1)$$

$\frac{1}{2}k(k+1)+1=\frac{1}{2}(k^2+k+2)$ であるから，$(k+1)$ 回目に現れる 1 は，第 $\frac{1}{2}(k^2+k+2)$ 項である。

(2)　$2n-1=17$ とすると　$n=9$

よって，1 回目に現れる 17 は，第 9 群の第 9 項である。

ゆえに，m 回目に現れる 17 は，第 $(m+8)$ 群の第 9 項である。

第 1 群から第 $(m+7)$ 群までの項数は　$\displaystyle\sum_{i=1}^{m+7} i=\frac{1}{2}(m+7)(m+8)$

$\dfrac{1}{2}(m+7)(m+8)+9=\dfrac{1}{2}(m^2+15m+74)$ であるから，m 回目に現れる 17 は，第 $\dfrac{1}{2}(m^2+15m+74)$ 項である。

(3)　第 i 群に含まれる項の和は　$\displaystyle\sum_{h=1}^{i}(2h-1)=i^2$

よって，初項から $(k+1)$ 回目の 1 までの項の和は

$$\sum_{i=1}^{k} i^2+1=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+1=\frac{1}{6}(2k^3+3k^2+k+6)$$

$$=\frac{1}{6}(k+2)(2k^2-k+3)$$

(4)　第 1 群から第 k 群までに含まれる項の和を T_k とすると

$$T_k=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

よって　$T_{15}=\dfrac{1}{6}\cdot15\cdot16\cdot31=1240$，$T_{16}=\dfrac{1}{6}\cdot16\cdot17\cdot33=1496$

また　$T_{15}+7^2=1289$，　$T_{15}+8^2=1304$

ゆえに，初項から第 16 群の第 8 項までの和が初めて 1300 より大きくなるから，求める n の値は　$\displaystyle n=\sum_{i=1}^{15} i+8=\frac{1}{2}\cdot15\cdot16+8=128$

$\boxed{6}$ 数列 $\{a_n\}$ が $a_n=(-1)^{n+1}n^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定義され，$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする。また，m は自然数とする。

(1)　$a_{2k-1}+a_{2k}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ m)$ を k を用いて表せ。

(2)　$n=2m$ のときの S_{2m}，$n=2m-1$ のときの S_{2m-1} を m を用いて表せ。

(3)　$S_n=\boxed{}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ と表される。

解答　(1)　$1-4k$　(2)　$S_{2m}=-2m^2-m$，$S_{2m-1}=2m^2-m$

(3)　$\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}n(n+1)$

解説

(1)　$a_{2k-1}+a_{2k}=(-1)^{2k}(2k-1)^2+(-1)^{2k+1}(2k)^2$

$=(2k-1)^2-(2k)^2$

$=1-4k$

(2)　(1) から　$\displaystyle S_{2m}=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{m}(1-4k)$

$=m-4\cdot\dfrac{1}{2}m(m+1)=-2m^2-m$

$a_{2m}=(-1)^{2m+1}(2m)^2=-4m^2$ であるから

$S_{2m-1}=S_{2m}-a_{2m}=-2m^2-m+4m^2=2m^2-m$

(3)　[1]　$n=2m$ すなわち $m=\dfrac{n}{2}$ のとき

(2) から　$S_n=-2\left(\dfrac{n}{2}\right)^2-\dfrac{n}{2}=-\dfrac{1}{2}n(n+1)$

[2]　$n=2m-1$ すなわち $m=\dfrac{n+1}{2}$ のとき

(2) から　$S_n=2\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2-\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+1-1)=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

[1]，[2] から　$S_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}n(n+1)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$