数学演習（いろいろな数列の和）Ｈ２３．１１．１５　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} k^2$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+3)$　　(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (20-3i)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (6k^2+1)$　　(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k-5)$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 4\cdot 2^{k-1}$　　(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-3)^k$　　(8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$

2．次の和を求めよ。

(1) $3+8+13+\cdots\cdots+(5n-2)$

(2) $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots\cdots+n(2n-1)$

3．和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}$ を求めよ。

4．和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{l} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)$ を求めよ。

5．(1) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k-2)$ を求めよ。

(2) 和 $1\cdot 1\cdot 3+2\cdot 3\cdot 5+3\cdot 5\cdot 7+\cdots\cdots+n(2n-1)(2n+1)$ を求めよ。

6．数列 $2\cdot12$，$4\cdot9$，$6\cdot6$，$8\cdot3$，……の初項から第 n 項までの和を求めよ。

7．次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　2，$2+5$，$2+5+8$，$2+5+8+11$，……

(2)　$1\cdot(2n-1)$，$3(2n-3)$，$5(2n-5)$，……，$(2n-3)\cdot3$，$(2n-1)\cdot1$

8．次の和を求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(2)　$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\dfrac{1}{1+2+3+4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+4+\cdots+n}$

9．一般項が $2n\cdot3^{n-1}$ で表される数列の初項から第 n 項までの和

$$S=2\cdot1+4\cdot3+6\cdot3^2+\cdots\cdots+2n\cdot3^{n-1}$$

を求めよ。

10．次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　1，$1+2$，$1+2+2^2$，……

(2)　$1\cdot(n+1)$，$2(n+2)$，$3(n+3)$，……

11．次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

9，99，999，9999，……

数学演習（いろいろな数列の和）Ｈ２３．１１．１５　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

1．次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{15} k^2$　　(2) $\sum_{k=1}^{n} (2k+3)$　　(3) $\sum_{i=1}^{n} (20-3i)$

(4) $\sum_{k=1}^{n} (6k^2+1)$　　(5) $\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k-5)$

(6) $\sum_{k=1}^{n} 4\cdot 2^{k-1}$　　(7) $\sum_{k=1}^{n} (-3)^k$　　(8) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$

解答　(1) 1240　(2) $n(n+4)$　(3) $-\frac{1}{2}n(3n-37)$　(4) $n(2n^2+3n+2)$

(5) $\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$　(6) $2^{n+2}-4$　(7) $\frac{3}{4}\{(-3)^n-1\}$　(8) $\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

解説

(1) $\sum_{k=1}^{15} k^2=\frac{1}{6}\cdot 15(15+1)(2\cdot 15+1)=1240$

(2) $\sum_{k=1}^{n} (2k+3)=2\sum_{k=1}^{n} k+3\sum_{k=1}^{n} 1=2\times\frac{1}{2}n(n+1)+3\times n$

$=n^2+4n=n(n+4)$

(3) $\sum_{i=1}^{n} (20-3i)=20\sum_{i=1}^{n} 1-3\sum_{i=1}^{n} i=20\times n-3\times\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{2}n\{40-3(n+1)\}=-\frac{1}{2}n(3n-37)$

(4) $\sum_{k=1}^{n} (6k^2+1)=6\sum_{k=1}^{n} k^2+\sum_{k=1}^{n} 1=6\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n$

$=n\{(n+1)(2n+1)+1\}=n(2n^2+3n+2)$

(5) $\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k-5)=\sum_{k=1}^{n} (k^2-6k+5)=\sum_{k=1}^{n} k^2-6\sum_{k=1}^{n} k+5\sum_{k=1}^{n} 1$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\times\frac{1}{2}n(n+1)+5\times n$

$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-18(n+1)+30\}$

$=\frac{1}{6}n(2n^2-15n+13)=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$

(6) $\sum_{k=1}^{n} 4\cdot 2^{k-1}=4\cdot 1+4\cdot 2^1+4\cdot 2^2+\cdots\cdots+4\cdot 2^{n-1}$

これは初項 4，公比 2，項数 n の等比数列の和であるから

$\sum_{k=1}^{n} 4\cdot 2^{k-1}=\frac{4(2^n-1)}{2-1}=4(2^n-1)=2^{n+2}-4$

(7) $\sum_{k=1}^{n} (-3)^k=(-3)+(-3)^2+(-3)^3+\cdots\cdots+(-3)^n$

これは初項 -3，公比 -3，項数 n の等比数列の和であるから

$\sum_{k=1}^{n} (-3)^k=\frac{-3\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=\frac{3}{4}\{(-3)^n-1\}$

(8) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^n}$

$=\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n$

これは初項 $\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$，項数 n の等比数列の和であるから

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

2．次の和を求めよ。

(1) $3+8+13+\cdots\cdots+(5n-2)$

(2) $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots\cdots+n(2n-1)$

解答　(1) $\frac{1}{2}n(5n+1)$　(2) $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

解説

(1) これは，第 k 項が $5k-2$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

よって，求める和は

$\sum_{k=1}^{n} (5k-2)=5\sum_{k=1}^{n} k-2\sum_{k=1}^{n} 1=5\times\frac{1}{2}n(n+1)-2\times n$

$=\frac{1}{2}n\{5(n+1)-4\}=\frac{1}{2}n(5n+1)$

(2) これは，第 k 項が $k(2k-1)$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

よって，求める和は

$\sum_{k=1}^{n} k(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n} k^2-\sum_{k=1}^{n} k=2\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

3．和 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}$ を求めよ。

解答　$\sqrt{n+3}-\sqrt{3}$

解説

$\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})}$

$=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(k+2)-(k+3)}=-(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})$

よって　$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}=\sum_{k=1}^{n}\{-(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})\}$

$=-\{(\sqrt{3}-\sqrt{4})+(\sqrt{4}-\sqrt{5})+(\sqrt{5}-\sqrt{6})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3})\}$

$=\sqrt{n+3}-\sqrt{3}$

4．和 $\sum_{n=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)$ を求めよ。

解答　$\frac{1}{6}l(l+1)(l+2)$

解説

$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$ であるから

$\sum_{n=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)=\sum_{n=1}^{l}\left\{\frac{1}{2}(n^2+n)\right\}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{l} n^2+\sum_{n=1}^{l} n\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}l(l+1)(2l+1)+\frac{1}{2}l(l+1)\right\}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}l(l+1)\{(2l+1)+3\}=\frac{1}{6}l(l+1)(l+2)$

5．(1) 和 $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k-2)$ を求めよ。

(2) 和 $1\cdot 1\cdot 3+2\cdot 3\cdot 5+3\cdot 5\cdot 7+\cdots\cdots+n(2n-1)(2n+1)$ を求めよ。

解答　(1) $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n-7)$　(2) $\frac{1}{2}n(n+1)(2n^2+2n-1)$

解説

(1) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k-2)=\sum_{k=1}^{n} (k^3-k^2-2k)=\sum_{k=1}^{n} k^3-\sum_{k=1}^{n} k^2-2\sum_{k=1}^{n} k$

$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)-12\}$

$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2-n-14)$

$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n-7)$

(2) これは，第 k 項が $k(2k-1)(2k+1)$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

よって，求める和は

$\sum_{k=1}^{n} k(2k-1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{n} (4k^3-k)=4\sum_{k=1}^{n} k^3-\sum_{k=1}^{n} k$

$=4\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{2}n(n+1)\{2n(n+1)-1\}$

$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n^2+2n-1)$

6．数列 $2\cdot 12$，$4\cdot 9$，$6\cdot 6$，$8\cdot 3$，……の初項から第 n 項までの和を求めよ。

解答　$-2n(n+1)(n-7)$

解説

2 つの数の積で作られる数列であり，

左の数：2，4，6，8，……

よって，初項 2，公差 2 の等差数列より，第 k 項は $2+(k-1)\cdot 2=2k$

右の数：12，9，6，3，……

よって，初項 12，公差 -3 の等差数列より，第 k 項は $12+(k-1)(-3)$

以上より，与えられた数列の第 k 項は　$2k\cdot\{12+(k-1)\cdot(-3)\}=-6k^2+30k$

よって，求める和は

$\sum_{k=1}^{n} (-6k^2+30k)=-6\sum_{k=1}^{n} k^2+30\sum_{k=1}^{n} k$

$=-6\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+30\times\frac{1}{2}n(n+1)$

$=n(n+1)\{-(2n+1)+15\}=-2n(n+1)(n-7)$

7．次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　2，2＋5，2＋5＋8，2＋5＋8＋11，……

(2)　$1\cdot(2n-1)$，$3(2n-3)$，$5(2n-5)$，……，$(2n-3)\cdot 3$，$(2n-1)\cdot 1$

解答　第 k 項，和の順に

(1)　$\frac{1}{2}k(3k+1)$，$\frac{1}{2}n(n+1)^2$　(2)　$(2k-1)(2n-2k+1)$，$\frac{1}{3}n(2n^2+1)$

解説

第 k 項を a_k，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1)　$a_k=2+5+8+\cdots\cdots+(3k-1)$

これは，初項 2，公差 3 の等差数列の初項から第 k 項までの和であるから

$$a_k=\frac{1}{2}k\{2\cdot 2+(k-1)\cdot 3\}=\frac{1}{2}k(3k+1)$$

また　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}(3k^2+k)\right\}=\frac{1}{2}\left\{3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)+1\}$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)^2$$

(2)　2 つの数の積で作られる数列であり，

左の数：1，3，5，7，……

よって，初項 1，公差 2 の等差数列より，第 k 項は $1+(k-1)\cdot 2=2k-1$

右の数：$2n-1$，$2n-3$，$2n-5$，$2n-3$，……

よって，初項 $2n-1$，公差 -2 の等差数列より、

第 k 項は $2n-1+(k-1)(-2)=2n-1-2k+2=2n-2k+1$

以上より，与えられた数列の第 k 項 a_k は $a_k=(2k-1)(2n-2k+1)$　$[1\leqq k\leqq n]$

また　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-4k^2+4(n+1)k-(2n+1)\}$

$$=-4\sum_{k=1}^{n}k^2+4(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-(2n+1)\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=-4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-(2n+1)n$$

$$=\frac{1}{3}n\{-2(2n^2+3n+1)+6(n^2+2n+1)-3(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{3}n(2n^2+1)$$

8．次の和を求めよ。

(1)　$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(2)　$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+2+3+4+\cdots+n}$

解答　(1)　$\frac{n}{3n+1}$　(2)　$\frac{2n}{n+1}$

解説

(1)　これは，第 k 項が $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

ここで，$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$ であるから，求める和は

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}$$

(2)　これは，第 k 項が $\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

第 k 項について，$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$ であるから

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}=\frac{1}{\frac{1}{2}k(k+1)}$$

$$=\frac{2}{k(k+1)}=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

より，求める和は

$$2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)=2\cdot\frac{(n+1)-1}{n+1}=\frac{2n}{n+1}$$

9．一般項が $2n\cdot 3^{n-1}$ で表される数列の初項から第 n 項までの和

$$S=2\cdot 1+4\cdot 3+6\cdot 3^2+\cdots\cdots+2n\cdot 3^{n-1}$$

を求めよ。

解答　$S=\frac{1}{2}\{(2n-1)\cdot 3^n+1\}$

解説

$$S=2\cdot 1+4\cdot 3+6\cdot 3^2+\cdots\cdots+2n\cdot 3^{n-1}$$

両辺に 3 を掛けると

$$3S=\quad 2\cdot 3+4\cdot 3^2+\cdots\cdots+2(n-1)\cdot 3^{n-1}+2n\cdot 3^n$$

辺々引くと

$$\begin{array}{rl} S= & 2\cdot 1+4\cdot 3+6\cdot 3^2+\cdots\cdots\qquad +2n\cdot 3^{n-1} \\ -)\quad 3S= & \qquad 2\cdot 3+4\cdot 3^2+\cdots\cdots+2(n-1)\cdot 3^{n-1}+2n\cdot 3^n \\ \hline -2S= & 2\cdot 1+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\cdots\cdots\cdots+2\cdot 3^{n-1}-2n\cdot 3^n \end{array}$$

より

$$S-3S=2\cdot 1+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\cdots\cdots+2\cdot 3^{n-1}-2n\cdot 3^n$$

$$=2(1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-1})-2n\cdot 3^n$$

$$=2\cdot\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}-2n\cdot 3^n$$

$$=(1-2n)\cdot 3^n-1$$

ゆえに，$-2S=(1-2n)\cdot 3^n-1$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\{(2n-1)\cdot 3^n+1\}$$

10．次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　1，$1+2$，$1+2+2^2$，……

(2)　$1\cdot(n+1)$，$2(n+2)$，$3(n+3)$，……

解答　(1)　第 k 項 2^k-1，$S_n=2^{n+1}-n-2$

(2)　第 k 項 $k(n+k)$，$S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(5n+1)$

解説

(1)　第 k 項は　$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^k-1)}{2-1}=2^k-1$

よって　$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1=\frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$

(2)　第 k 項は　$k(n+k)$

よって　$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(n+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+n\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3n\}=\frac{1}{6}n(n+1)(5n+1)$$

11．次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

9，99，999，9999，……

解答　第 k 項 10^k-1，和 $\frac{10^{n+1}-9n-10}{9}$

解説

第 k 項は $999\cdots9=9+9\cdot 10+9\cdot 10^2+\cdots+9\cdot 10^{k-1}$ より，初項 9，公比 10，項数 k の等比数列の和である。したがって，公式より

$$\frac{9\cdot(10^k-1)}{10-1}=\frac{9\cdot(10^k-1)}{9}=10^k-1$$

ゆえに，第 k 項は　10^k-1

よって，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}(10^k-1)=\sum_{k=1}^{n}10^k-\sum_{k=1}^{n}1=\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n=\frac{10^{n+1}-9n-10}{9}$$