数学演習（いろいろな和）Ｈ２２．６．２５　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

１．次の和を記号 Σ を用いないで表せ。

(1) $\sum_{k=1}^{5} 2k$　　(2) $\sum_{k=1}^{4} (3^k-1)$　　(3) $\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k}$

２．次の和を記号 Σ を用いて表せ。

(1) $4+5+6+7+8+9$　　(2) $2+5+8+\cdots\cdots+29$

(3) $10^2+6^2+2^2+\cdots\cdots+(-34)^2$

３．次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n} (4k^2+1)$　　(2) $\sum_{k=1}^{n} (k^2+3k)$

(3) $\sum_{k=1}^{n} (k^2-2k+3)$　　(4) $\sum_{k=1}^{n} (2k^2-3k+5)$

(5) $\sum_{k=1}^{n} 2k(k-3)$　　(6) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$

(7) $\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k-5)$　　(8) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)(k+2)$

４．次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{6} 2^k$　　(2) $\sum_{k=1}^{5} 3^{k-1}$　　(3) $\sum_{k=1}^{n} (-4)^k$　　(4) $\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1}$

５．次の和を求めよ。

(1) $3+8+13+\cdots\cdots+(5n-2)$　　(2) $2^2+4^2+6^2+\cdots\cdots+(2n)^2$

(3) $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots\cdots+n(2n-1)$

6. 数列 $1\cdot4$，$3\cdot8$，$5\cdot12$，$7\cdot16$，…… の初項から第 10 項までの和を求めよ。

7. (1) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k-2)$ を求めよ。

(2) 和 $1\cdot1\cdot3+2\cdot3\cdot5+3\cdot5\cdot7+\cdots\cdots+n(2n-1)(2n+1)$ を求めよ。

注意 自然数の 3 乗の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

8. 次の和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{2\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot8}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2n(2n+2)}$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

9. 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}$ を求めよ。

10. 次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 1，$1+2$，$1+2+2^2$，……

(2) $1\cdot(n+1)$，$2(n+2)$，$3(n+3)$，……

11. 次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) 2，$2+4$，$2+4+6$，$2+4+6+8$，……

(2) 1，$1+3$，$1+3+9$，$1+3+9+27$，……

1．次の和を記号 Σ を用いないで表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 2k$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(3^k-1)$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k}$

解答　(1) $2+4+6+8+10$　(2) $2+8+26+80$　(3) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n+1}$

解説

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 2k=2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4+2\cdot5=2+4+6+8+10$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(3^k-1)=(3^1-1)+(3^2-1)+(3^3-1)+(3^4-1)=2+8+26+80$

(3) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}$

2．次の和を記号 Σ を用いて表せ。

(1) $4+5+6+7+8+9$　　(2) $2+5+8+\cdots\cdots+29$

(3) $10^2+6^2+2^2+\cdots\cdots+(-34)^2$

解答　(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(k+3)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(3k-1)$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}(-4k+14)^2$

解説

(1) $4+5+6+7+8+9=(1+3)+(2+3)+(3+3)+(4+3)+(5+3)+(6+3)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{6}(k+3)$

別解　$\displaystyle 4+5+6+7+8+9=\sum_{k=4}^{9}k$

(2) $2+5+8+\cdots\cdots+29=(3\cdot1-1)+(3\cdot2-1)+(3\cdot3-1)+\cdots\cdots+(3\cdot10-1)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{10}(3k-1)$

(3) 数列 10，6，2，……，-34 は，初項 10，公差 -4 の等差数列であるから，第 n 項は　$10+(n-1)\cdot(-4)=-4n+14$

また，項数を n とすると，$-4n+14=-34$ から　$n=12$

よって　$\displaystyle 10^2+6^2+2^2+\cdots\cdots+(-34)^2=\sum_{k=1}^{12}(-4k+14)^2$

3．次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k^2+1)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+3)$　　(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k^2-3k+5)$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2k(k-3)$　　(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$　　(8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(k+2)$

解答　(1) $\dfrac{1}{3}n(4n^2+6n+5)$　(2) $\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+5)$　(3) $\dfrac{1}{6}n(2n^2-3n+13)$

(4) $\dfrac{1}{6}n(4n^2-3n+23)$　(5) $\dfrac{2}{3}n(n+1)(n-4)$　(6) $\dfrac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$

(7) $\dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$　(8) $\dfrac{1}{6}n(4n^2+15n-1)$

解説

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k^2+1)=4\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}1=4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)+n$

$=\dfrac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)+3\}=\dfrac{1}{3}n(4n^2+6n+5)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\times\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+9\}=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+10)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+5)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+3)=\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\times\frac{1}{2}n(n+1)+3n$

$=\dfrac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-6(n+1)+18\}=\dfrac{1}{6}n(2n^2-3n+13)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k^2-3k+5)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}5$

$=2\times\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-3\times\dfrac{1}{2}n(n+1)+5n=\dfrac{1}{6}n\{2(n+1)(2n+1)-9(n+1)+30\}$

$=\dfrac{1}{6}n(4n^2-3n+23)$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2k(k-3)=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-6k)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k$

$=2\times\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\times\dfrac{1}{2}n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)$

$=\dfrac{1}{3}n(n+1)\{(2n+1)-9\}=\dfrac{1}{3}n(n+1)(2n-8)=\dfrac{2}{3}n(n+1)(n-4)$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$=4\times\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\times\dfrac{1}{2}n(n+1)+n=\dfrac{2}{3}n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n$

$=\dfrac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)=\dfrac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-6k+5)=\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}5$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\times\dfrac{1}{2}n(n+1)+5n=\dfrac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-18(n+1)+30\}$

$=\dfrac{1}{6}n(2n^2-15n+13)=\dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$

(8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n}(2k^2+3k-2)=2\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}2$

$=2\times\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\times\dfrac{1}{2}n(n+1)-2n=\dfrac{1}{6}n\{2(n+1)(2n+1)+9(n+1)-12\}$

$=\dfrac{1}{6}n(4n^2+15n-1)$

4．次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}2^k$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-4)^k$　　(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}5^{k-1}$

解答　(1) 126　(2) 121　(3) $-\dfrac{(-4)^{n+1}+4}{5}$　(4) $\dfrac{5^n-1}{4}$

解説

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}2^k=\frac{2\times(2^6-1)}{2-1}=126$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}=\frac{1\times(3^5-1)}{3-1}=121$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-4)^k=\frac{-4\times\{1-(-4)^n\}}{1-(-4)}=\frac{-4-(-4)^{n+1}}{5}=-\frac{(-4)^{n+1}+4}{5}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}5^{k-1}=\frac{1\times(5^n-1)}{5-1}=\frac{5^n-1}{4}$

5．次の和を求めよ。

(1) $3+8+13+\cdots\cdots+(5n-2)$　　(2) $2^2+4^2+6^2+\cdots\cdots+(2n)^2$

(3) $1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+\cdots\cdots+n(2n-1)$

解答　(1) $\dfrac{1}{2}n(5n+1)$　(2) $\dfrac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$　(3) $\dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

解説

(1)　これは，第 k 項が $5k-2$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

よって，求める和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k-2)=5\sum_{k=1}^{n}k-2\sum_{k=1}^{n}1=5\times\frac{1}{2}n(n+1)-2\times n$

$=\dfrac{1}{2}n\{5(n+1)-4\}=\dfrac{1}{2}n(5n+1)$

(2)　これは，第 k 項が $(2k)^2$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

よって，求める和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=4\sum_{k=1}^{n}k^2=4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

(3)　これは，第 k 項が $k(2k-1)$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

よって，求める和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k=2\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}=\dfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

6．数列 $1\cdot4$，$3\cdot8$，$5\cdot12$，$7\cdot16$，…… の初項から第 10 項までの和を求めよ。

解答　2860

解説

第 k 項は　$(2k-1)\cdot4k=8k^2-4k$

よって，求める和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(8k^2-4k)=8\sum_{k=1}^{10}k^2-4\sum_{k=1}^{10}k$

$=8\times\dfrac{1}{6}\cdot10(10+1)(2\cdot10+1)-4\times\dfrac{1}{2}\cdot10(10+1)$

$=\dfrac{2}{3}\cdot10\cdot11(2\cdot21-3)=2860$

7．(1)　和 $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k-2)$ を求めよ。

(2)　和 $1\cdot1\cdot3+2\cdot3\cdot5+3\cdot5\cdot7+\cdots\cdots+n(2n-1)(2n+1)$ を求めよ。

注意　自然数の 3 乗の和　$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

解答　(1)　$\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n-7)$　　(2)　$\frac{1}{2}n(n+1)(2n^2+2n-1)$

解説

(1)　$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k-2)=\sum_{k=1}^{n}(k^3-k^2-2k)=\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k$

$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)-12\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2-n-14)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n-7)$$

(2)　これは，第 k 項が $k(2k-1)(2k+1)$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n} k(2k-1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}(4k^3-k)=4\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=4\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\{2n(n+1)-1\}$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n^2+2n-1)$$

8．次の和を求めよ。

(1)　$\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}$

(2)　$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

解答　(1)　$\frac{n}{4(n+1)}$　　(2)　$\frac{n}{3n+1}$

解説

(1)　これは，第 k 項が $\frac{1}{2k(2k+2)}$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

ここで，$\frac{1}{2k(2k+2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ であるから，求める和は

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$$

(2)　これは，第 k 項が $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ である数列の初項から第 n 項までの和である。

ここで，$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$ であるから，求める和は

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}$$

9．和 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}$ を求めよ。

解答　$\sqrt{n+3}-\sqrt{3}$

解説

$$\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})}$$

$$=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(k+2)-(k+3)}=-(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})$$

よって　$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}=\sum_{k=1}^{n}\{-(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})\}$

$$=-\{(\sqrt{3}-\sqrt{4})+(\sqrt{4}-\sqrt{5})+(\sqrt{5}-\sqrt{6})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3})\}$$

$$=\sqrt{n+3}-\sqrt{3}$$

10．次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　1，$1+2$，$1+2+2^2$，……

(2)　$1\cdot(n+1)$，$2(n+2)$，$3(n+3)$，……

解答　(1)　第 k 項 2^k-1，$S_n=2^{n+1}-n-2$

(2)　第 k 項 $k(n+k)$，$S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(5n+1)$

解説

(1)　第 k 項は　$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^k-1)}{2-1}=2^k-1$

よって　$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1=\frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$

(2)　第 k 項は　$k(n+k)$

よって　$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(n+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+n\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3n\}=\frac{1}{6}n(n+1)(5n+1)$$

11．次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　2，$2+4$，$2+4+6$，$2+4+6+8$，……

(2)　1，$1+3$，$1+3+9$，$1+3+9+27$，……

解答　順に　(1)　$k(k+1)$，$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$　　(2)　$\frac{1}{2}(3^k-1)$，$\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$

解説

数列の第 k 項を a_k，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1)　$a_k=2+4+6+\cdots\cdots+2k=\sum_{n=1}^{k}2n=2\cdot\frac{1}{2}k(k+1)=k(k+1)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(2)　$a_k=1+3+9+\cdots\cdots+3^{k-1}=\frac{3^k-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^k-1)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(3^k-1)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}3^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\right\}$$

$$=\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$$