数学演習（いろいろな数列の和）　　(　)組(　)番　名前(　　　　)

1．次の和を求めよ。　$\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$

2．次の数列の初項から第n項までの和を求めよ。　$1\cdot1$，$2\cdot3$，$3\cdot5$，$4\cdot7$，$5\cdot9$，……

3．階差数列を利用して，次の数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。　10，8，4，-2，-10，……

4．初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2-4n$ で表される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

5．次の数列の第 k 項 a_k と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

3，$3+9$，$3+9+27$，$3+9+27+81$，……

6．和 $S=\dfrac{1}{3\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot11}+\dfrac{1}{11\cdot15}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ を求めよ。

7．和 $S=1\cdot1+3\cdot3+5\cdot3^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$ を求めよ。

8．正の奇数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には $(2n-1)$ 個の数が入るものとする。

1 | 3，5，7 | 9，11，13，15，17 | 19，……
第1群　第2群　第3群

(1)　第 n 群の最初の数を求めよ。

(2)　第 n 群に入るすべての数の和を求めよ。

9． $\displaystyle\sum_{k=1}^{2007}\sin\frac{k\pi}{3}$ を計算せよ。

10. 和 $1^2\cdot n+2^2(n-1)+3^2(n-2)+\cdots\cdots+(n-1)^2\cdot 2+n^2\cdot 1$ を求めよ。

11. $a_n=\begin{cases}2n-1 & (n\text{ は奇数})\\ -n & (n\text{ は偶数})\end{cases}$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}a_n$ を求めよ。

12. 次の和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}$

13. 数列 $\dfrac{1}{1}$, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{3}{3}$, $\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{7}{4}$, $\dfrac{1}{5}$, …… について

(1) $\dfrac{5}{8}$ は第何項か。

(2) この数列の第 800 項を求めよ。

(3) この数列の初項から第 800 項までの和を求めよ。

数学演習（いろいろな数列の和）　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．次の和を求めよ。　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$

解答　$\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$

解説

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-6k+5)=\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}5$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+5n$$
$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-18(n+1)+30\}$$
$$=\frac{1}{6}n(2n^2-15n+13)=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$$

2．次の数列の初項から第n項までの和を求めよ。　$1\cdot1$，$2\cdot3$，$3\cdot5$，$4\cdot7$，$5\cdot9$，……

解答　$\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

解説

2つの数の積になっており，左側の数は初項1, 公差1 の等差数列，右側は初項1, 公差2 の等差数列である。

これは，第 k 項が $k(2k-1)$ である数列の，初項から第 n 項までの和である。

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

3．階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　10，8，4，-2，-10，……

解答　$a_n=-n^2+n+10$

解説

この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は　-2，-4，-6，-8，……

よって　$b_n=-2n$

ゆえに，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2k)=10-2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=-n^2+n+10$$

初項は $a_1=10$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=-n^2+n+10$

4．初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2-4n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=2n-5$

解説

初項は　$a_1=S_1=1^2-4\cdot1=-3$　……①

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-4n)-\{(n-1)^2-4(n-1)\}$

$=2n-5$

① より $a_1=-3$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n-5$

5．次の数列の第 k 項 a_k と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

3，$3+9$，$3+9+27$，$3+9+27+81$，……

解答　$a_k=\frac{3}{2}(3^k-1)$，$S_n=\frac{3}{4}(3^{n+1}-2n-3)$

解説

$a_k=3+9+27+\cdots\cdots+3^k$

これは，初項 3，公比 3 の等比数列の，初項から第 k 項までの和であるから

$$a_k=\frac{3(3^k-1)}{3-1}=\frac{3}{2}(3^k-1)$$

よって　$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2}(3^k-1)=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}(3^k-1)=\frac{3}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}3^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)$$
$$=\frac{3}{2}\left\{\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\right\}=\frac{3}{2}\left\{\frac{3}{2}(3^n-1)-n\right\}$$
$$=\frac{3}{4}\{3(3^n-1)-2n\}=\frac{3}{4}(3^{n+1}-2n-3)$$

6．和 $S=\dfrac{1}{3\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot11}+\dfrac{1}{11\cdot15}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ を求めよ。

解答　$S=\dfrac{n}{3(4n+3)}$

解説

第 k 項は　$\dfrac{1}{(4k-1)(4k+3)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4k-1}-\dfrac{1}{4k+3}\right)$

よって，求める和 S は

$$S=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4n+3)-3}{3(4n+3)}=\frac{n}{3(4n+3)}$$

7．和 $S=1\cdot1+3\cdot3+5\cdot3^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$ を求めよ。

解答　$S=(n-1)\cdot3^n+1$

解説

$$S=1\cdot1+3\cdot3+5\cdot3^2+7\cdot3^3+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$$
$$3S=\qquad 1\cdot3+3\cdot3^2+5\cdot3^3+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot3^{n-1}+(2n-1)\cdot3^n$$

辺々を引くと

$$S-3S=1\cdot1+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+\cdots\cdots+2\cdot3^{n-1}-(2n-1)\cdot3^n$$

よって　$$-2S=1+2(3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot3^n$$
$$=1+2\cdot\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot3^n=-2(n-1)\cdot3^n-2$$

したがって　$S=(n-1)\cdot3^n+1$

8．正の奇数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には $(2n-1)$ 個の数が入るものとする。

1　| 3，5，7 | 9，11，13，15，17 | 19，……

第 1 群　第 2 群　　第 3 群

(1)　第 n 群の最初の数を求めよ。

(2)　第 n 群に入るすべての数の和を求めよ。

解答　(1)　$2n^2-4n+3$　　(2)　$(2n-1)(2n^2-2n+1)$

解説

(1)　$n\geqq2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る奇数の個数は

$1+3+5+\cdots\cdots+\{2(n-1)-1\}=(n-1)^2$ (個)

よって，第 n 群 $(n\geqq2)$ の最初の数は，奇数の列の第 $\{(n-1)^2+1\}$ 項であるから

$2\{(n-1)^2+1\}-1=2(n-1)^2+1=2n^2-4n+3$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，求める数は　$2n^2-4n+3$

(2)　求める和は，初項 $2n^2-4n+3$，公差 2，項数 $2n-1$ の等差数列の和であるから

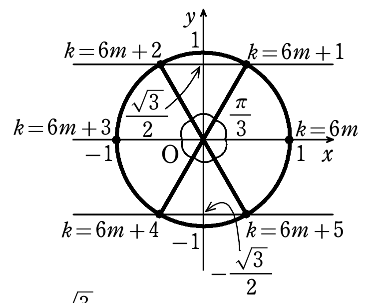
$$\frac{1}{2}(2n-1)[2\cdot(2n^2-4n+3)+\{(2n-1)-1\}\cdot2]=(2n-1)(2n^2-2n+1)$$

9．$\displaystyle\sum_{k=1}^{2007}\sin\frac{k\pi}{3}$ を計算せよ。

解答　$\sqrt{3}$

解説

m を整数とすると，$\sin\dfrac{k\pi}{3}$ の値は



$k=6m+1$ のとき

$\sin\left(2m\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$k=6m+2$ のとき

$\sin\left(2m\pi+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$k=6m+3$ のとき　$\sin(2m\pi+\pi)=\sin\pi=0$

$k=6m+4$ のとき　$\sin\left(2m\pi+\dfrac{4}{3}\pi\right)=\sin\dfrac{4}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$k=6m+5$ のとき　$\sin\left(2m\pi+\dfrac{5}{3}\pi\right)=\sin\dfrac{5}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$k=6m$ のとき　$\sin2m\pi=0$

$2007=6\times334+3$ であるから，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2007}\sin\frac{k\pi}{3}$ は，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+0-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+0\right)$という６個の和を３３４セット足したあと，余った３個分の和$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+0\right)$で，２００７番目まで足したことになる。したがって，

$$\sum_{k=1}^{2007}\sin\frac{k\pi}{3}=334\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+0-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+0\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+0=\sqrt{3}$$

10. 和 $1^2\cdot n+2^2(n-1)+3^2(n-2)+\cdots\cdots+(n-1)^2\cdot 2+n^2\cdot 1$ を求めよ。

解答 $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

解説

和の各項を，ある数列の初項，第 2 項，…… と考えると，その数列の第 k 項は

$$k^2(n-k+1)=-k^3+(n+1)k^2$$

したがって，求める和 S は

$$S=\sum_{k=1}^{n}\{-k^3+(n+1)k^2\}=-\sum_{k=1}^{n}k^3+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=-\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2\{-3n+2(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

11. $a_n=\begin{cases}2n-1 & (n\text{ は奇数})\\ -n & (n\text{ は偶数})\end{cases}$ のとき，$\sum_{n=1}^{100}a_n$ を求めよ。

解答 2400

解説

$a_n=\begin{cases}2n-1 & (n\text{ は奇数})\\ -n & (n\text{ は偶数})\end{cases}$

n が奇数のとき，$n=2m-1$ (m は自然数) とおけて

$$a_n=a_{2m-1}=2(2m-1)-1=4m-3$$

n が偶数のとき，$n=2m$ (m は自然数) とおけて

$$a_n=a_{2m}=-2m$$

よって $\sum_{k=1}^{100}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots+a_{99}+a_{100}$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots\cdots+(a_{99}+a_{100})$ ←５０セット

よって $\sum_{n=1}^{100}a_n=\sum_{m=1}^{50}(a_{2m-1}+a_{2m})=\sum_{m=1}^{50}\{(4m-3)+(-2m)\}$

$$=\sum_{m=1}^{50}(2m-3)=2\sum_{m=1}^{50}m-\sum_{m=1}^{50}3$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 50(50+1)-3\cdot 50=2550-150=2400$$

12. 次の和を求めよ。

(1) $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}$

解答 (1) $\frac{2n}{n+1}$ (2) $\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

解説

(1)

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{2}k(k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$$

$$=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{2}{n(n+1)}$$

$$=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}=\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{n}{3^n}$ をSとおくと

$$S=\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{n}{3^n}\quad\cdots\cdots①$$

$$\frac{1}{3}S=\quad\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}\quad\cdots\cdots②$$

①－②より

$$\frac{2}{3}S=\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}$$

$$=\left(\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{3^{n+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{3^1}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{2}-\frac{2n+3}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

したがって，$\frac{2}{3}S=\frac{1}{2}-\frac{2n+3}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ より $S=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

13. 数列 $\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{7}{4}$，$\frac{1}{5}$，…… について

(1) $\frac{5}{8}$ は第何項か。 (2) この数列の第 800 項を求めよ。

(3) この数列の初項から第 800 項までの和を求めよ。

解答 (1) 第 31 項 (2) $\frac{39}{40}$ (3) 790

解説

$\frac{1}{1}\Big|\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}\Big|\frac{1}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{5}{3}\Big|\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{7}{4}\Big|\frac{1}{5}$，……

のように群に分ける。

(1) $\frac{5}{8}$ は第 8 群の 3 番目の項である。第1群から第7群までの項数は $\sum_{k=1}^{7}k$ より

$\sum_{k=1}^{7}k+3=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8+3=31$ であるから $\frac{5}{8}$は第 31 項

(2) 第 800 項が第 n 群に含まれるとすると $\sum_{k=1}^{n-1}k<800\leqq\sum_{k=1}^{n}k$

よって $(n-1)n<1600\leqq n(n+1)$

$n=40$ とすると，$39\cdot 40=1560$，$40\cdot 41=1640$ より

この不等式を満たす自然数 n は $n=40$

第40群の最初の項$\frac{1}{40}$は，$\frac{1}{1}$から数えて $\sum_{k=1}^{39}k+1=\frac{1}{2}\cdot 39\cdot 40+1=781$ より

781番目になるから，800番目は $800-\sum_{k=1}^{39}k=20$ であるから第40群の20番目

第40群のk番目は，初項$\frac{1}{40}$，公差$\frac{2}{40}$の等差数列より $\frac{1}{40}+(k-1)\cdot\frac{2}{40}$ より

$k=20$ とすると $\frac{1}{40}+(20-1)\cdot\frac{2}{40}=\frac{39}{40}$ したがって，第800項は $\frac{39}{40}$

(3) 第 n 群に属する n 個の分数の和は

初項$\frac{1}{n}$，公差$\frac{2}{n}$，項数nの等差数列の和であるから

$\frac{1}{2}\cdot n\cdot\left\{2\cdot\frac{1}{n}+(n-1)\cdot\frac{2}{n}\right\}=\frac{1}{2}n\cdot 2=n$ となる。

ゆえに，求める和は，第1群から第39群までは群ごとに足し，第20群は最初の$\frac{1}{40}$から20番目の$\frac{39}{40}$まで足せばいいので，

$$\sum_{k=1}^{39}k+\left(\frac{1}{40}+\frac{3}{40}+\frac{5}{40}+\cdots\cdots+\frac{39}{40}\right)=\frac{1}{2}\cdot 39\cdot 40+\frac{1}{40}\left\{\frac{1}{2}\cdot 20(1+39)\right\}=790$$