数学演習（等差数列）R１．１１．２２　　　　(　)組(　)番　名前(　)

$\boxed{1}$ (1)　等差数列 13，8，3，…… の一般項 a_n を求めよ。また，第 15 項を求めよ。

(2)　第 53 項が -47，第 77 項が -95 である等差数列 $\{a_n\}$ において

（ア）　一般項を求めよ。　（イ）　-111 は第何項か。

（ウ）　初めて負になるのは第何項か。

$\boxed{2}$ 一般項が $a_n=-3n+7$ である数列 $\{a_n\}$ について

(1)　数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを証明し，その初項と公差を求めよ。

(2)　一般項が $c_n=a_{3n}$ である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明し，その初項と公差を求めよ。

$\boxed{3}$ 等差数列をなす 3 数があって，その和は 27，積は 693 である。この 3 数を求めよ。

$\boxed{4}$ (1)　調和数列 2，6，-6，-2，…… の一般項 a_n を求めよ。

(2)　初項が a，第 5 項が $9a$ である調和数列がある。この数列の第 n 項 a_n を a で表せ。

$\boxed{5}$ 次のような和 S を求めよ。

(1)　等差数列 1，4，7，……，97 の和

(2)　初項 200，公差 -5 の等差数列の初項から第 100 項までの和

(3)　第 8 項が 37，第 24 項が 117 の等差数列の第 20 項から第 50 項までの和

$\boxed{6}$ 100 から 200 までの整数のうち，次の数の和を求めよ。

(1)　3 で割って 1 余る数　　(2)　2 または 3 の倍数

$\boxed{7}$ 初項が 55，公差が -6 の等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，S_n の最大値は $\boxed{}$ である。

$\boxed{8}$ p を素数とするとき，0 と p の間にあって，p^2 を分母とする既約分数の総和を求めよ。

$\boxed{9}$ 等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項がそれぞれ $a_n=4n-3$，$b_n=7n-5$ であるとき，この 2 つの数列に共通に含まれる数を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{10}$ 初項が a_1 で，公差 d が整数である等差数列 $\{a_n\}$ が，以下の 2 つの条件 (a) と (b) を満たすとする。このとき，初項 a_1 と公差 d を求めよ。

(a)　$a_4+a_6+a_8=84$

(b)　$a_n>50$ となる最小の n は 11 である。

$\boxed{11}$ n を 3 以上の整数とする。$2n$ 個の整数 1，2，3，……，$2n$ から無作為に異なる 3 個の数を選ぶとき，次の問いに答えよ。

(1)　3 個の数を小さい順に並べた数列が，公差 2 の等差数列である選び方は何通りあるか。

(2)　3 個の数を小さい順に並べた数列が，等差数列である確率を求めよ。

数学演習（等差数列）Ｒ１．１１．２２　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1 (1)　等差数列 13，8，3，…… の一般項 a_n を求めよ。また，第 15 項を求めよ。

(2)　第 53 項が -47，第 77 項が -95 である等差数列 $\{a_n\}$ において

（ア）　一般項を求めよ。　（イ）　-111 は第何項か。

（ウ）　初めて負になるのは第何項か。

解答　(1)　$a_n=-5n+18$，$a_{15}=-57$

(2)　（ア）　$-2n+59$　（イ）　第 85 項　（ウ）　第 30 項

解説

(1)　初項が 13，公差が $8-13=-5$ であるから，一般項は

$a_n=13+(n-1)\cdot(-5)=-5n+18$

また　$a_{15}=-5\cdot 15+18=-57$

(2)　（ア）　初項をa，公差を d とすると，$a_{53}=-47$，$a_{77}=-95$ であるから

$a+52d=-47$，$a+76d=-95$

これを解いて　$a=57$，$d=-2$

ゆえに　$a_n=57+(n-1)\cdot(-2)=-2n+59$

（イ）　$a_n=-111$ とすると　$-2n+59=-111$

これを解いて　$n=85$　よって　第 85 項

（ウ）　$a_n<0$ とすると　$2n>59$　よって　$n>\dfrac{59}{2}=29.5$

したがって，初めて負になるのは　第 30 項

2 一般項が $a_n=-3n+7$ である数列 $\{a_n\}$ について

(1)　数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを証明し，その初項と公差を求めよ。

(2)　一般項が $c_n=a_{3n}$ である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明し，その初項と公差を求めよ。

解答　(1)　証明略；初項 4，公差 -3　(2)　証明略；初項 -2，公差 -9

解説

(1)　$a_n=-3n+7$ であるから

$a_{n+1}-a_n=\{-3(n+1)+7\}-(-3n+7)=-3$　（一定）

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ は等差数列である。

また，初項 $a_1=4$，公差 -3 である。

(2)　$c_n=a_{3n}=-3\cdot(3n)+7=-9n+7$ であるから

$c_{n+1}-c_n=\{-9(n+1)+7\}-(-9n+7)=-9$　（一定）

ゆえに，数列 $\{c_n\}$ は等差数列である。

また，初項 $c_1=-2$，公差 -9 である。

3 等差数列をなす 3 数があって，その和は 27，積は 693 である。この 3 数を求めよ。

解答　7，9，11

解説

この数列の中央の項を a，公差を d とすると，3 数は $a-d$，a，$a+d$ と表される。

和が 27，積が 693 であるから

$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=27\\(a-d)a(a+d)=693\end{cases}$　ゆえに　$\begin{cases}3a=27 & \cdots\cdots ①\\a(a^2-d^2)=693 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$a=9$　これを ② に代入して　$d=\pm 2$

よって，求める 3 数は　7，9，11 または 11，9，7

すなわち　7，9，11

別解　等差数列をなす 3 数の数列を a，b，c とすると　$2b=a+c$　…… ①

条件から　$a+b+c=27$　…… ②，$abc=693$　…… ③

① を ② に代入して　$3b=27$　ゆえに　$b=9$

このとき，①，③ から　$a+c=18$，$ac=77$

したがって，a，c は 2 次方程式 $x^2-18x+77=0$ の 2 つの解である。

$(x-7)(x-11)=0$ を解いて　$x=7$，11

すなわち　$(a, c)=(7, 11)$，$(11, 7)$

よって，求める 3 数は　7，9，11

4 (1)　調和数列 2，6，-6，-2，…… の一般項 a_n を求めよ。

(2)　初項が a，第 5 項が $9a$ である調和数列がある。この数列の第 n 項 a_n を a で表せ。

解答　(1)　$a_n=\dfrac{6}{5-2n}$　(2)　$a_n=\dfrac{9a}{11-2n}$

解説

(1)　2，6，-6，-2，……　…… ① が調和数列であるから，

$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{6}$，$-\dfrac{1}{6}$，$-\dfrac{1}{2}$，……　…… ② が等差数列となる。

数列 ② の初項は $\dfrac{1}{2}$，公差は $\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}$ であるから，一般項は

$\dfrac{1}{2}+(n-1)\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5-2n}{6}$

よって，数列 ① の一般項 a_n は　$a_n=\dfrac{6}{5-2n}$

(2)　初項が $\dfrac{1}{a}$，第 5 項が $\dfrac{1}{9a}$ の等差数列の公差を d とすると

$\dfrac{1}{a}+(5-1)d=\dfrac{1}{9a}$　よって　$d=-\dfrac{2}{9a}$

この数列の一般項 $\dfrac{1}{a_n}$ は　$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a}+(n-1)\cdot\left(-\dfrac{2}{9a}\right)=\dfrac{11-2n}{9a}$

ゆえに　$a_n=\dfrac{9a}{11-2n}$

5 次のような和 S を求めよ。

(1)　等差数列 1，4，7，……，97 の和

(2)　初項 200，公差 -5 の等差数列の初項から第 100 項までの和

(3)　第 8 項が 37，第 24 項が 117 の等差数列の第 20 項から第 50 項までの和

解答　(1)　$S=1617$　(2)　$S=-4750$　(3)　$S=5332$

解説

(1)　初項が 1，公差が 3 であるから，末項 97 が第 n 項であるとすると

$1+(n-1)\cdot 3=97$　よって　$n=33$

ゆえに，初項 1，末項 97，項数 33 の等差数列の和を求めて

$S=\dfrac{1}{2}\cdot 33(1+97)=1617$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 100\{2\cdot 200+(100-1)\cdot(-5)\}=-4750$

(3)　初項を a，公差を d，一般項を a_n とする。

$a_8=37$，$a_{24}=117$ であるから　$\begin{cases}a+7d=37\\a+23d=117\end{cases}$

この連立方程式を解いて　$a=2$，$d=5$

初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$S_{50}=\dfrac{1}{2}\cdot 50\{2\cdot 2+(50-1)\cdot 5\}=6225$

$S_{19}=\dfrac{1}{2}\cdot 19\{2\cdot 2+(19-1)\cdot 5\}=893$

よって　$S=S_{50}-S_{19}=6225-893=5332$

別解　$a_{20}=a+19d=2+19\cdot 5=97$ を初項と考えると，第 20 項から第 50 項までの項数は $50-20+1=31$ であるから　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 31\{2\cdot 97+(31-1)\cdot 5\}=5332$

6 100 から 200 までの整数のうち，次の数の和を求めよ。

(1)　3 で割って 1 余る数　(2)　2 または 3 の倍数

解答　(1)　5083　(2)　10050

解説

(1)　100 から 200 までで，3 で割って 1 余る数は

$3\cdot 33+1$，$3\cdot 34+1$，……，$3\cdot 66+1$

これは，初項が $3\cdot 33+1=100$，末項が $3\cdot 66+1=199$，項数が $66-33+1=34$ の等差数列であるから，その和は　$\dfrac{1}{2}\cdot 34(100+199)=5083$

別解　$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$ を利用。

初項 100，公差 3，項数 34 であるから　$\dfrac{1}{2}\cdot 34\{2\cdot 100+(34-1)\cdot 3\}=5083$

(2)　100 から 200 までの 2 の倍数は　$2\cdot 50$，$2\cdot 51$，……，$2\cdot 100$

これは，初項 100，末項 200，項数 51 の等差数列であるから，その和は

$\dfrac{1}{2}\cdot 51(100+200)=7650$　…… ①

100 から 200 までの 3 の倍数は　$3\cdot 34$，$3\cdot 35$，……，$3\cdot 66$

これは，初項 102，末項 198，項数 33 の等差数列であるから，その和は

$\dfrac{1}{2}\cdot 33(102+198)=4950$　…… ②

100 から 200 までの 6 の倍数は　$6\cdot 17$，$6\cdot 18$，……，$6\cdot 33$

これは，初項 102，末項 198，項数 17 の等差数列であるから，その和は

$\dfrac{1}{2}\cdot 17(102+198)=2550$　…… ③

よって，①，②，③ から，求める和は　$7650+4950-2550=10050$

7 初項が 55，公差が -6 の等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，S_n の最大値は $\boxed{}$ である。

解答　280

(解説)

初項55，公差 -6 の等差数列の一般項 a_n は

$$a_n=55+(n-1)\cdot(-6)=-6n+61$$

$a_n<0$ とすると　$-6n+61<0$

これを解いて　$n>\dfrac{61}{6}=10.1\cdots$

よって　$n\leqq10$ のとき　$a_n>0$，　$n\geqq11$ のとき　$a_n<0$

ゆえに，S_n は $n=10$ のとき最大となるから，求める最大値は

$$\frac{1}{2}\cdot10\{2\cdot55+(10-1)\cdot(-6)\}=280$$

別解　$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot55+(n-1)\cdot(-6)\}$

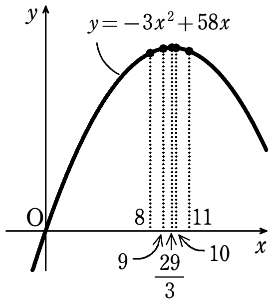
$$=-3n^2+58n$$

$$=-3\left(n-\frac{29}{3}\right)^2+3\cdot\left(\frac{29}{3}\right)^2$$

n は自然数であるから，$\dfrac{29}{3}$ に最も近い自然数

$n=10$ のとき，最大値 $S_{10}=-3\cdot10^2+58\cdot10=280$

をとる。



8　p を素数とするとき，0 と p の間にあって，p^2 を分母とする既約分数の総和を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{2}p^3(p-1)$

(解説)

まず，q を自然数として，$0<\dfrac{q}{p^2}<p$ を満たす $\dfrac{q}{p^2}$ を求める。

$0<q<p^3$ であるから　$q=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ p^3-1$

よって　$\dfrac{q}{p^2}=\dfrac{1}{p^2},\ \dfrac{2}{p^2},\ \dfrac{3}{p^2},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{p^3-1}{p^2}$　……①

これらの和を S_1 とすると

$$S_1=\frac{1}{2}(p^3-1)\left(\frac{1}{p^2}+\frac{p^3-1}{p^2}\right)=\frac{1}{2}(p^3-1)p$$

① のうち，$\dfrac{q}{p^2}$ が既約分数とならないものは

$$\frac{q}{p^2}=\frac{p}{p^2},\ \frac{2p}{p^2},\ \frac{3p}{p^2},\ \cdots\cdots,\ \frac{(p^2-1)p}{p^2}$$

これらの和を S_2 とすると

$$S_2=\frac{1}{2}(p^2-1)\left\{\frac{p}{p^2}+\frac{(p^2-1)p}{p^2}\right\}=\frac{1}{2}(p^2-1)p$$

ゆえに，求める総和を S とすると，$S=S_1-S_2$ であるから

$$S=\frac{1}{2}(p^3-1)p-\frac{1}{2}(p^2-1)p$$

$$=\frac{1}{2}p\{(p^3-1)-(p^2-1)\}=\frac{1}{2}p^3(p-1)$$

9　等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項がそれぞれ $a_n=4n-3$，$b_n=7n-5$ であるとき，この 2 つの数列に共通に含まれる数を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$c_n=28n-19$

(解説)

$a_l=b_m$ とすると　$4l-3=7m-5$

よって　$4l-7m=-2$　……①

$l=-4$，$m=-2$ は ① の整数解の 1 つであるから

$4(l+4)-7(m+2)=0$　　ゆえに　$4(l+4)=7(m+2)$

4 と 7 は互いに素であるから，k を整数として

$$l+4=7k,\ m+2=4k$$

すなわち　$l=7k-4$，$m=4k-2$　と表される。

ここで，l，m は自然数であるから，$7k-4\geqq1$ かつ $4k-2\geqq1$ より，k は自然数である。

よって，数列 $\{c_n\}$ の第 k 項は，数列 $\{a_n\}$ の第 l 項すなわち第 $(7k-4)$ 項であり

$$4(7k-4)-3=28k-19$$

求める一般項は，k を n におき換えて　$c_n=28n-19$

別解　4 と 7 の最小公倍数は　28

$\{a_n\}$：1，5，9，13，17，21，25，29，…… であり，

$\{b_n\}$：2，9，16，23，30，…… であるから　$c_1=9$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 9，公差 28 の等差数列であるから，その一般項は

$$c_n=9+(n-1)\cdot28=28n-19$$

10　初項が a_1 で，公差 d が整数である等差数列 $\{a_n\}$ が，以下の 2 つの条件 (a) と (b) を満たすとする。このとき，初項 a_1 と公差 d を求めよ。

(a)　$a_4+a_6+a_8=84$

(b)　$a_n>50$ となる最小の n は 11 である。

解答　$a_1=3$，$d=5$

(解説)

$a_n=a_1+(n-1)d$ であるから，条件 (a) より

$$(a_1+3d)+(a_1+5d)+(a_1+7d)=84$$

よって　$a_1=28-5d$　……①

条件 (b) から　$a_{10}\leqq50$，$a_{11}>50$　すなわち　$a_1+9d\leqq50$，$a_1+10d>50$

① を代入すると　$4d+28\leqq50$，$5d+28>50$

整理して　$4d\leqq22$，$5d>22$　　ゆえに　$\dfrac{22}{5}<d\leqq\dfrac{22}{4}$

公差 d は整数であるから　$d=5$

したがって，① から　$a_1=28-5\cdot5=3$

11　n を 3 以上の整数とする。$2n$ 個の整数 1，2，3，……，$2n$ から無作為に異なる 3 個の数を選ぶとき，次の問いに答えよ。

(1)　3 個の数を小さい順に並べた数列が，公差 2 の等差数列である選び方は何通りあるか。

(2)　3 個の数を小さい順に並べた数列が，等差数列である確率を求めよ。

解答　(1)　$(2n-4)$ 通り　　(2)　$\dfrac{3}{2(2n-1)}$

(解説)

(1)　3 個の数を小さい順に並べた数列が，公差 2 の等差数列であるとき，その数列の第 3 項は $2n$ 以下であるから，第 2 項は $(2n-2)$ 以下，初項は $(2n-4)$ 以下である。

よって，初項の選び方は 1，2，……，$2n-4$ の $(2n-4)$ 通りある。

初項を決めれば，第 2 項，第 3 項は 1 通りに決まるから，求める選び方の総数は

$(2n-4)$ 通り

(2)　(1) と同様に考えると，3 個の数を小さい順に並べた数列が，公差 d の等差数列であるとき，初項は $(2n-2d)$ 以下である。

よって，初項の選び方は 1，2，……，$2n-2d$ の $(2n-2d)$ 通りあるから，数列が公差 d の等差数列である選び方は　$(2n-2d)$ 通り

ここで，$2n-2d\geqq1$ とすると　$d\leqq n-\dfrac{1}{2}$

この不等式を満たす最大の自然数 d は　$d=n-1$

したがって，数列が等差数列である選び方は

$$(2n-2\cdot1)+(2n-2\cdot2)+\cdots\cdots+\{2n-2(n-1)\}$$

$$=(2n-2)+(2n-4)+\cdots\cdots+4+2$$

$$=2\{1+2+\cdots\cdots+(n-1)\}$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{1+(n-1)\}=n(n-1)\ (\text{通り})$$

ゆえに，求める確率は

$$\frac{n(n-1)}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}=\frac{n(n-1)}{\dfrac{2n(2n-1)(2n-2)}{3\cdot2\cdot1}}=\frac{3}{2(2n-1)}$$