数学演習（等差数列･等比数列）Ｈ２３．１１．２

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．第 6 項が 33，第 11 項が 63 である等差数列において，第 16 項を求めよ。また，200 より大きくなるのは第何項からか。

2．次の 2 つの等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に共通に現れる数を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の第 n 項を n の式で表せ。

$\{a_n\}$: 7，10，13，……，　　$\{b_n\}$: 6，11，16，……

3．等差数列をなす 3 数の和が 9，積が 15 である。この 3 数を求めよ。

4．次の等差数列の和を求めよ。　2，5，8，……，50

5．1 から 100 までの整数について，次の和を求めよ。

(1)　4 の倍数の和　　(2)　4 の倍数でない数の和

6．ある等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_{10}=100$，$S_{20}=400$ であるとき，この数列の初項と公差を求めよ。

7．初項が 70，公差が -4 である等差数列において

(1)　第何項が初めて負になるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

8．等比数列 $\{a_n\}$ について，$a_2+a_3=6$，$a_4+a_5=54$ である。このとき，数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ。

9．数列 24，a，b が等差数列をなし，数列 a，b，8 が等比数列をなすという。このとき，a，b の値を求めよ。

10. 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　$1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots\cdots$

(2)　$\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2},\ 4+3\sqrt{2},\ \cdots\cdots$

11. 第 2 項が 6，初項から第 3 項までの和が 21 である等比数列の初項と公比を求めよ。

12. 初項が 81，公比が $\dfrac{1}{3}$，末項が $\dfrac{1}{3}$ である等比数列の和を求めよ。

1．第 6 項が 33，第 11 項が 63 である等差数列において，第 16 項を求めよ。また，200 より大きくなるのは第何項からか。

解答　（前半）93　　（後半）第 34 項

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その初項を a，公差を d とする。

$a_6=33$ であるから　　$a+5d=33$　……①

$a_{11}=63$ であるから　　$a+10d=63$　……②

①，② を解いて　　$a=3,\ d=6$

よって　　$a_n=3+(n-1)\times6=6n-3$

したがって　　$a_{16}=6\cdot16-3=93$

また，$a_n>200$ とすると　　$6n-3>200$　　よって　　$n>\dfrac{203}{6}=33.8\cdots\cdots$　……①

① を満たす最小の自然数 n は　　$n=34$

よって，200 より大きくなるのは第 34 項からである。

2．次の 2 つの等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に共通に現れる数を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の第 n 項を n の式で表せ。

$\{a_n\}$：7，10，13，……，　　$\{b_n\}$：6，11，16，……

解答　$c_n=15n+1$

解説

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の項を書き出すと

$\{a_n\}$：7，10，13，16，19，22，25，28，31，34，37，40，43，46，……

$\{b_n\}$：6，11，16，21，26，31，36，41，46，……

よって，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に共通な最初の数は 16 であり，また公差はそれぞれ 3，5 であるから，数列 $\{c_n\}$ は初項が 16 で，3 と 5 の最小公倍数 15 を公差とする等差数列をなす。したがって　$c_n=16+(n-1)\cdot15=15n+1$

3．等差数列をなす 3 数の和が 9，積が 15 である。この 3 数を求めよ。

解答　1，3，5

解説

この 3 数を $a-d,\ a,\ a+d$ とおく。

3 数の和が 9 であるから　　$(a-d)+a+(a+d)=9$　……①

3 数の積が 15 であるから　　$(a-d)a(a+d)=15$　　……②

① を解くと　　$a=3$

$a=3$ を ② に代入すると　　$3(3-d)(3+d)=15$　　よって　　$9-d^2=5$

ゆえに　　$d^2=4$　　したがって　　$d=\pm2$

$a=3,\ d=2$ のとき　　$a-d=1,\ a+d=5$

$a=3,\ d=-2$ のとき　　$a-d=5,\ a+d=1$

よって，求める 3 数は　　1，3，5

別解　この 3 数を $a,\ b,\ c\ (a\leqq b\leqq c)$ とおくと

$a+b+c=9$　……①

$abc=15$　……②

また　　$2b=a+c$　……③

③ から　　$a+c=2b$　　これを ① に代入すると　　$2b+b=9$　　よって　　$b=3$

このとき，①，② から　　$a+c=6$　……④，　$ac=5$　……⑤

④ から　　$c=6-a$　　これを ⑤ に代入すると　　$a(6-a)=5$

整理すると　　$a^2-6a+5=0$　　よって，$(a-1)(a-5)=0$ から　　$a=1,\ 5$

⑤ から　　$a=1$ のとき　$c=5$，　$a=5$ のとき　$c=1$

このうち，$a\leqq c$ を満たすものは　　$a=1,\ c=5$

以上から，求める 3 数は　　1，3，5

参考　連立方程式 ④，⑤ は，a，c が 2 次方程式 $x^2-6x+5=0$ の解であることを利用して解いてもよい。

4．次の等差数列の和を求めよ。　2，5，8，……，50

解答　442

解説

初項は 2，公差は 3 であるから，項数を n とすると

$2+(n-1)\cdot3=50$　　よって　　$n=17$

したがって，求める和は　　$\dfrac{1}{2}\cdot17(2+50)=442$

5．1 から 100 までの整数について，次の和を求めよ。

(1)　4 の倍数の和　　　　(2)　4 の倍数でない数の和

解答　(1)　1300　　(2)　3750

解説

(1)　求める和は

$$4+8+12+\cdots\cdots+100=4(1+2+3+\cdots\cdots+25)$$
$$=4\times\frac{1}{2}\cdot25(25+1)$$
$$=1300$$

(2)　求める和は

$$1+2+3+\cdots\cdots+100-(4+8+12+\cdots\cdots+100)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot100(100+1)-1300=5050-1300$$
$$=3750$$

6．ある等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_{10}=100$，$S_{20}=400$ であるとき，この数列の初項と公差を求めよ。

解答　初項 1，公差 2

解説

初項を a，公差を d とする。

$S_{10}=100$ であるから　　$\dfrac{1}{2}\cdot10(2a+9d)=100$　　よって　　$2a+9d=20$　……①

$S_{20}=400$ であるから　　$\dfrac{1}{2}\cdot20(2a+19d)=400$　　よって　　$2a+19d=40$　……②

①，② を解いて　　$a=1,\ d=2$

したがって　　初項は 1，公差は 2

7．初項が 70，公差が -4 である等差数列において

(1)　第何項が初めて負になるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

解答　(1)　第 19 項　　(2)　第 18 項，和 648

解説

一般項を a_n とすると　　$a_n=70+(n-1)\times(-4)=74-4n$

(1)　$a_n<0$ とすると　　$74-4n<0$　　よって　　$n>\dfrac{37}{2}=18.5$　……①

① を満たす最小の自然数 n は　　$n=19$

したがって，第 19 項が初めて負になる。

(2)　(1) の結果から　　$a_1>0,\ a_2>0,\ \cdots\cdots,\ a_{18}>0,\ a_{19}<0,\ a_{20}<0,\ \cdots\cdots$

よって，初項から第 18 項までの和が最大となる。

また，そのときの和は　　$\dfrac{1}{2}\cdot18\{2\cdot70+(18-1)\cdot(-4)\}=648$

8．等比数列 $\{a_n\}$ について，$a_2+a_3=6$，$a_4+a_5=54$ である。このとき，数列 $\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ。

解答　初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 3 または 初項 1，公比 -3

解説

初項を a，公比を r とする。

$a_2+a_3=6$ であるから　　$ar+ar^2=6$　……①

$a_4+a_5=54$ であるから　　$ar^3+ar^4=54$　……②

② から　　$(ar+ar^2)r^2=54$　　① を代入して　　$6r^2=54$

よって，$r^2=9$ から　　$r=\pm3$

① から　　$r=3$ のとき　　$3a+9a=6$　　ゆえに　$a=\dfrac{1}{2}$

$r=-3$ のとき　$-3a+9a=6$　　ゆえに　$a=1$

したがって　　初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 3　または　初項 1，公比 -3

9．数列 24，a，b が等差数列をなし，数列 a，b，8 が等比数列をなすという。このとき，a，b の値を求めよ。

解答　$(a,\ b)=(8,\ -8),\ (18,\ 12)$

解説

数列 24，a，b が等差数列をなすから　　$2a=24+b$　……①

数列 a，b，8 が等比数列をなすから　　$b^2=a\times8$

よって　　$b^2=4\cdot2a$

① を代入すると　　$b^2=4(24+b)$　　整理すると　　$b^2-4b-96=0$

ゆえに　　$(b+8)(b-12)=0$　　したがって　　$b=-8,\ 12$

① から　　$b=-8$ のとき　$a=8$，　$b=12$ のとき　$a=18$

すなわち　　$(a,\ b)=(8,\ -8),\ (18,\ 12)$

10．次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　$1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots\cdots$　　　　(2)　$\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2},\ 4+3\sqrt{2},\ \cdots\cdots$

解答　(1)　$S_n=\dfrac{2}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$　　(2)　$S_n=(\sqrt{2}+1)^n-1$

解説

(1)　初項は 1，公比は $-\frac{1}{2}$ であるから

$$S_n=\frac{1\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

(2)　初項は $\sqrt{2}$，公比は $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$ であるから

$$S_n=\frac{\sqrt{2}\{(\sqrt{2}+1)^n-1\}}{(\sqrt{2}+1)-1}=(\sqrt{2}+1)^n-1$$

11. 第 2 項が 6，初項から第 3 項までの和が 21 である等比数列の初項と公比を求めよ。

解答　初項 3，公比 2 または 初項 12，公比 $\frac{1}{2}$

解説

初項を a，公比を r とする。

第 2 項が 6 であるから　$ar=6$　…… ①

初項から第 3 項までの和が 21 であるから　$a+ar+ar^2=21$

よって　$a(1+r+r^2)=21$

両辺に r をかけて　$ar(1+r+r^2)=21r$

① を代入すると　$6(1+r+r^2)=21r$　すなわち　$2r^2-5r+2=0$

よって　$(r-2)(2r-1)=0$　したがって　$r=2,\ \frac{1}{2}$

① から　$r=2$ のとき　$a=3$，　$r=\frac{1}{2}$ のとき　$a=12$

よって　初項 3，公比 2 または 初項 12，公比 $\frac{1}{2}$

12. 初項が 81，公比が $\frac{1}{3}$，末項が $\frac{1}{3}$ である等比数列の和を求めよ。

解答　$\frac{364}{3}$

解説

項数を n とすると　$81\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}$　よって　$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{243}$

ゆえに　$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^5$　よって，$n-1=5$ から　$n=6$

したがって，求める和は　$\frac{81\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{364}{3}$