数学演習（等差数列･等比数列）Ｈ２３．１１．４

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．第 3 項が 70，第 8 項が 55 である等差数列 $\{a_n\}$ について

(1)　この数列の一般項を求めよ。

(2)　19 は第何項か。

2．一般項が $4n-1$ である等差数列を $\{a_n\}$，一般項が $5n-1$ である等差数列を $\{b_n\}$ とする。$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通に現れる数を小さい順に並べてできる等差数列 $\{c_n\}$ について

(1)　$\{c_n\}$の初項と公差を求めよ。

(2)　200 以下の整数のうち $\{c_n\}$ に含まれる数の和を求めよ。

3．200 より小さい正の整数について，次の数の和を求めよ。

(1)　5 で割り切れない数

(2)　3 または 5 で割り切れる数

(3)　3 でも 5 でも割り切れない数

4．ある等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_5=100$，$S_{10}=300$ のとき，S_n を求めよ。

5．初項 70，公差 -5 の等差数列 $\{a_n\}$ について

(1)　第何項から負の数となるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，その最大値を求めよ。

6．異なる数 x，y について，数列 $\sqrt{3}$，x，y は等差数列で，数列 x，$\sqrt{3}$，y は等比数列であるとき，$x=$ ア $\boxed{}$ で，等比数列の公比は イ $\boxed{}$ である。

7．第 4 項が -1，第 7 項が $\dfrac{1}{27}$ である等比数列の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

8．初項から第 3 項までの和が 6，第 2 項から第 4 項までの和が -12 である等比数列の初項と公比を求めよ。

9．次の和を求めよ。

(1)　初項 2，公比 $-\dfrac{1}{2}$，項数 n の等比数列の和

(2)　等比数列 1，3，9，…… の第 6 項から第 10 項までの和

10．初項から第 10 項までの和が 6，初項から第 20 項までの和が 18 であるとき，この等比数列の初項から第 30 項までの和を求めよ。

1．第 3 項が 70，第 8 項が 55 である等差数列 $\{a_n\}$ について

(1) この数列の一般項を求めよ。

(2) 19 は第何項か。

解答　(1)　$a_n=-3n+79$　　(2)　第 20 項

解説

(1) 初項を a，公差を d とすると

$a_3=70$ から　$a+2d=70$　…… ①

$a_8=55$ から　$a+7d=55$　…… ②

②−① から　$5d=-15$　　ゆえに　$d=-3$

これを ① に代入して　$a+2\cdot(-3)=70$　　よって　$a=76$

ゆえに　$a_n=76+(n-1)\cdot(-3)=-3n+79$

(2) (1) から，$a_n=19$ とすると　$-3n+79=19$

ゆえに　$n=20$　　よって，19 は　第 20 項

2．一般項が $4n-1$ である等差数列を $\{a_n\}$，一般項が $5n-1$ である等差数列を $\{b_n\}$ とする。$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通に現れる数を小さい順に並べてできる等差数列 $\{c_n\}$ について

(1) $\{c_n\}$の初項と公差を求めよ。

(2) 200 以下の整数のうち $\{c_n\}$ に含まれる数の和を求めよ。

解答　(1)　初項 19，公差 20　(2)　1090

解説

(1) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の項を書き出すと

$\{a_n\}$：3，7，11，15，19，23，27，31，35，39，43，47，51，55，59，……

$\{b_n\}$：4，9，14，19，24，29，34，39，44，49，54，59，……

$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に共通に含まれる項を書き出すと

19，39，59，……

よって，等差数列 $\{c_n\}$ の初項は 19，公差は 20 である。

(2) 一般項は　$19+(n-1)\cdot20=20n-1$

200 以下となるのは　$20n-1\leqq200$　より　$n\leqq10.005$

よって，求める和は，初項 19，公差 20，項数 10 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot10(2\cdot19+9\cdot20)=1090$$

3．200 より小さい正の整数について，次の数の和を求めよ。

(1) 5 で割り切れない数　　(2) 3 または 5 で割り切れる数

(3) 3 でも 5 でも割り切れない数

解答　(1)　16000　　(2)　9168　　(3)　10732

解説

(1) 5 の倍数を順に並べると　5･1，5･2，5･3，……，5･39

これは初項 5，末項 195，項数 39 の等差数列であるから，5 の倍数の和は

$$\frac{1}{2}\cdot39(5+195)=3900 \quad \cdots\cdots ①$$

また，200 より小さい正の整数の和は　$\frac{1}{2}\cdot199(1+199)=19900$

よって，5 で割り切れない数の和は　$19900-3900=16000$

(2) 3 の倍数を順に並べると　3･1，3･2，3･3，……，3･66

これは初項 3，末項 198，項数 66 の等差数列であるから，3 の倍数の和は

$$\frac{1}{2}\cdot66(3+198)=6633 \quad \cdots\cdots ②$$

3 かつ 5 の倍数，すなわち 15 の倍数を順に並べると

15･1，15･2，15･3，……，15･13

これは初項 15，末項 195，項数 13 の等差数列であるから，15 の倍数の和は

$$\frac{1}{2}\cdot13(15+195)=1365 \quad \cdots\cdots ③$$

①，②，③ から，3 または 5 で割り切れる数の和は

$3900+6633-1365=9168$

(3) (1)，(2) から，3 でも 5 でも割り切れない数の和は

$19900-9168=10732$

4．ある等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_5=100$，$S_{10}=300$ のとき，S_n を求めよ。

解答　$S_n=2n(n+5)$

解説

等差数列の初項を a，公差を d とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\} \quad \cdots\cdots ①$$

$S_5=100$ であるから，① より　$\frac{1}{2}\cdot5(2a+4d)=100$

ゆえに　$a+2d=20$　…… ②

$S_{10}=300$ であるから，① より　$\frac{1}{2}\cdot10(2a+9d)=300$

ゆえに　$2a+9d=60$　…… ③

②，③ から　$a=12$，$d=4$

よって，① から　$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot12+(n-1)\cdot4\}=2n(n+5)$

5．初項 70，公差−5 の等差数列 $\{a_n\}$ について

(1) 第何項から負の数となるか。

(2) 初項から第何項までの和が最大となるか。また，その最大値を求めよ。

解答　(1)　第 16 項　　(2)　第 14 項または第 15 項，最大値は 525

解説

(1) $a_n=70+(n-1)\cdot(-5)=-5n+75$

$a_n<0$ とすると　$-5n+75<0$

ゆえに，$n>15$ から　第 16 項

(2) この等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) より，a_1 から a_{14} までは正の数，a_{15} は 0，a_{16} からは負の数となるから，S_n は $n=14$ または $n=15$ のとき最大となり，最大値は

$$S_{14}=S_{15}=\frac{1}{2}\cdot14\{2\cdot70+13\cdot(-5)\}=\frac{1}{2}\cdot14\cdot75=525$$

よって，初項から第 14 項，または第 15 項までの和が最大で，最大値は 525

6．異なる数 x，y について，数列 $\sqrt{3}$，x，y は等差数列で，数列 x，$\sqrt{3}$，y は等比数列であるとき，$x=$ ア $\boxed{}$ で，等比数列の公比は イ $\boxed{}$ である。

解答　(ア)　$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(イ)　-2

解説

x と y は異なる数なので　$x\neq y$ …… ① とする。

数列 $\sqrt{3}$，x，y が等差数列であるから　$2x=\sqrt{3}+y$　…… ②

数列 x，$\sqrt{3}$，y が等比数列であるから　$(\sqrt{3})^2=xy$　…… ③

② から　$y=2x-\sqrt{3}$　…… ④

④ を ③ に代入して整理すると　$2x^2-\sqrt{3}x-3=0$

ゆえに　$(2x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

よって　$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sqrt{3}$

$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，④ から　$y=-2\sqrt{3}$

これは ① を満たす。

$x=\sqrt{3}$ のとき，④ から　$y=\sqrt{3}$

これは ① を満たさない。

したがって　$x=$ ア $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

また，等比数列 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sqrt{3}$，$-2\sqrt{3}$ の公比は　イ -2

7．第 4 項が −1，第 7 項が $\frac{1}{27}$ である等比数列の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解答　$27\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

解説

初項を a，公比を r とする。

第 4 項が −1 であるから　$ar^3=-1$　…… ①

第 7 項が $\frac{1}{27}$ であるから　$ar^6=\frac{1}{27}$　…… ②

② から　$ar^3\cdot r^3=\frac{1}{27}$　　① を代入すると　$-r^3=\frac{1}{27}$

よって　$r^3+\frac{1}{27}=0$　　ゆえに　$\left(r+\frac{1}{3}\right)\left(r^2-\frac{1}{3}r+\frac{1}{9}\right)=0$

r は実数であるから　$r=-\frac{1}{3}$

$r^3=-\frac{1}{27}$ を ① に代入して　$-\frac{1}{27}a=-1$　　ゆえに　$a=27$

したがって，求める一般項は　$27\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

参考　$r^n=b^n$ $(b\fallingdotseq 0)$ の実数解は

n が偶数のとき，$b>0$ ならば　$r=\pm b$

n が奇数のとき　$r=b$

8．初項から第 3 項までの和が 6，第 2 項から第 4 項までの和が -12 である等比数列の初項と公比を求めよ。

解答　初項 2，公比 -2

解説

初項を a，公比を r とする。

初項から第 3 項までの和が 6 であるから

$$a+ar+ar^2=6 \quad \cdots\cdots ①$$

第 2 項から第 4 項までの和が -12 であるから

$$ar+ar^2+ar^3=-12$$

すなわち　$r(a+ar+ar^2)=-12$

① を代入して　$6r=-12$

よって　$r=-2$

$r=-2$ を ① に代入すると　$a-2a+4a=6$

ゆえに　$a=2$

したがって　初項 2，公比 -2

9．次の和を求めよ。

(1)　初項 2，公比 $-\frac{1}{2}$，項数 n の等比数列の和

(2)　等比数列 1，3，9，…… の第 6 項から第 10 項までの和

解答　(1)　$\frac{4}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$　(2)　29403

解説

(1)　$$\frac{2\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

(2)　与えられた等比数列は，初項が 1，公比が 3 であるから，その一般項 a_n は

$$a_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$$

よって，求める和を S とすると

$$S=a_6+a_7+\cdots\cdots+a_{10}=3^5+3^6+\cdots\cdots+3^9$$

これは，初項 3^5，公比 3，項数 5 の等比数列の和であるから

$$S=\frac{3^5(3^5-1)}{3-1}=\frac{243\cdot 242}{2}=29403$$

別解　初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}=\frac{3^n-1}{2}$$

よって，求める和は

$$S_{10}-S_5=\frac{3^{10}-1}{2}-\frac{3^5-1}{2}=\frac{3^{10}-3^5}{2}=\frac{3^5(3^5-1)}{2}=29403$$

10．初項から第 10 項までの和が 6，初項から第 20 項までの和が 18 であるとき，この等比数列の初項から第 30 項までの和を求めよ。

解答　42

解説

初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$S_{10}=6$，$S_{20}=18$ であるから　$r\fallingdotseq 1$

$S_{10}=6$ から　$\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=6$ …… ①　　$S_{20}=18$ から　$\frac{a(1-r^{20})}{1-r}=18$ …… ②

② から　$\frac{a(1-r^{10})(1+r^{10})}{1-r}=18$　　① を代入して　$6(1+r^{10})=18$

ゆえに　$r^{10}=2$

したがって，これと ① から　$$S_{30}=\frac{a(1-r^{30})}{1-r}=\frac{a(1-r^{10})(1+r^{10}+r^{20})}{1-r}$$

$$=6\cdot(1+2+2^2)=42$$