数学演習（等比数列）R１．１１．２３　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ (1)　等比数列 2，−6，18，…… の一般項 a_n を求めよ。また，第 8 項を求めよ。

(2)　第 10 項が 32，第 15 項が 1024 である等比数列の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

$\boxed{2}$ 3 つの実数 a，b，c はこの順で等比数列になり，c，a，b の順で等差数列になる。a，b，c の積が −27 であるとき，a，b，c の値を求めよ。

$\boxed{3}$ (1)　等比数列 a，$3a^2$，$9a^3$，…… の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。ただし，$a \fallingdotseq 0$ とする。

(2)　初項 5，公比 r の等比数列の第 2 項から第 4 項までの和が −30 であるとき，実数 r の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 初項から第 5 項までの和が 3，初項から第 10 項までの和が 9 である等比数列について，次のものを求めよ。ただし，公比は実数とする。

(1)　初項から第 15 項までの和　　　(2)　第 16 項から第 20 項までの和

$\boxed{5}$ 年利 5 %，1 年ごとの複利で，毎年度初めに 20 万円ずつ積み立てると，7 年度末には元利合計はいくらになるか。ただし，$(1.05)^7 = 1.4071$ とする。

$\boxed{6}$ 等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ において，公差と公比が同じ値 $d\ (\fallingdotseq 0)$ をとる。初項に関しても同じ値 $a_1 = b_1 = a\ (>0)$ をとる。$a_3 = b_3$，$a_9 = b_5$ が成り立つとき，a，d の値を求めよ。

$\boxed{7}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を $a_n=3n-1$，$b_n=2^n$ とする。数列 $\{b_n\}$ の項のうち，数列 $\{a_n\}$ の項でもあるものを小さい方から並べて数列 $\{c_n\}$ を作るとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{8}$ 初項が 3，公比が 2 の等比数列を $\{a_n\}$ とする。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1) $10^3<a_n<10^5$ を満たす n の値の範囲を求めよ。

(2) 初項から第 n 項までの和が 30000 を超える最小の n の値を求めよ。

$\boxed{9}$ 自然数 $2^a3^b5^c$（a，b，c は 0 以上の整数）の正の約数の総和を求めよ。

1 (1) 等比数列 2，−6，18，…… の一般項 a_n を求めよ。また，第 8 項を求めよ。

(2) 第 10 項が 32，第 15 項が 1024 である等比数列の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解答 (1) $a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$，$a_8=-4374$　(2) 2^{n-5}

解説

(1) 初項が 2，公比が $\dfrac{-6}{2}=-3$ であるから，一般項は

$$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$$

また　$a_8=2\cdot(-3)^{8-1}=-4374$

(2) 初項を a，公比を r，一般項を a_n とすると，$a_{10}=32$，$a_{15}=1024$ であるから

$$\begin{cases} ar^9=32 & \cdots\cdots ① \\ ar^{14}=1024 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② から　$ar^9\cdot r^5=1024$

これに ① を代入して　$32r^5=1024$

ゆえに　$r^5=32$　すなわち　$r^5=2^5$

r は実数であるから　$r=2$

このとき，① から　$a\cdot 2^9=32$　よって　$a=\dfrac{1}{16}$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{16}\cdot 2^{n-1}=2^{n-5}$

2 3 つの実数 a，b，c はこの順で等比数列になり，c，a，b の順で等差数列になる。a，b，c の積が -27 であるとき，a，b，c の値を求めよ。

解答 $(a,\ b,\ c)=(-3,\ -3,\ -3)$，$\left(\dfrac{3}{2},\ -3,\ 6\right)$

解説

数列 a，b，c が等比数列をなすから　$b^2=ac$　……①

数列 c，a，b が等差数列をなすから　$2a=c+b$　……②

a，b，c の積が -27 であるから　$abc=-27$　……③

① を ③ に代入して　$b^3=-27$　b は実数であるから　$b=-3$

これを ①，② に代入して　$ac=9$，$2a=c-3$

これらから c を消去して　$2a^2+3a-9=0$

左辺を因数分解して　$(a+3)(2a-3)=0$

これを解いて　$a=-3,\ \dfrac{3}{2}$

したがって　$(a,\ b,\ c)=(-3,\ -3,\ -3)$，$\left(\dfrac{3}{2},\ -3,\ 6\right)$

別解 数列 a，b，c が等比数列をなすから，公比を r とすると　$b=ar$，$c=ar^2$

a，b，c の積が -27 であるから　$abc=-27$

よって　$a\cdot ar\cdot ar^2=-27$　すなわち　$(ar)^3=-27$

ゆえに　$ar=-3$　$b=ar=-3$ であるから　$ac=9$　……①

また，数列 c，a，b が等差数列をなすから　$2a=c+b$

よって　$2a=c-3$　……②

①，② から，c を消去して　$2a^2+3a-9=0$

左辺を因数分解して　$(a+3)(2a-3)=0$

これを解いて　$a=-3,\ \dfrac{3}{2}$

したがって　$(a,\ b,\ c)=(-3,\ -3,\ -3)$，$\left(\dfrac{3}{2},\ -3,\ 6\right)$

3 (1) 等比数列 a，$3a^2$，$9a^3$，…… の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。ただし，$a\neq 0$ とする。

(2) 初項 5，公比 r の等比数列の第 2 項から第 4 項までの和が -30 であるとき，実数 r の値を求めよ。

解答 (1) $a\neq\dfrac{1}{3}$ のとき　$S_n=\dfrac{a\{(3a)^n-1\}}{3a-1}$，$a=\dfrac{1}{3}$ のとき　$S_n=\dfrac{1}{3}n$

(2) $r=-2$

解説

(1) 初項 a，公比 $3a$，項数 n の等比数列の和であるから

[1] $3a\neq 1$ すなわち $a\neq\dfrac{1}{3}$ のとき　$S_n=\dfrac{a\{(3a)^n-1\}}{3a-1}$

[2] $3a=1$ すなわち $a=\dfrac{1}{3}$ のとき　$S_n=na=\dfrac{1}{3}n$

(2) 初項 5，公比 r の等比数列で，第 2 項から第 4 項までの和は，初項 $5r$，公比 r，項数 3 の等比数列の和と考えられる。

もとの数列の第 2 項から第 4 項までの和が -30 であるから

[1] $r\neq 1$ のとき　$\dfrac{5r(r^3-1)}{r-1}=-30$

整理して　$r(r^2+r+1)=-6$

すなわち　$r^3+r^2+r+6=0$

因数分解して　$(r+2)(r^2-r+3)=0$

r は実数であるから　$r=-2$

[2] $r=1$ のとき

第 2 項から第 4 項までの和は $3\cdot 5=15$ となり，不適。

以上から　$r=-2$

4 初項から第 5 項までの和が 3，初項から第 10 項までの和が 9 である等比数列について，次のものを求めよ。ただし，公比は実数とする。

(1) 初項から第 15 項までの和　(2) 第 16 項から第 20 項までの和

解答 (1) 21　(2) 24

解説

初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ とすると，$S_5=5a$ となり　$5a=3$

このとき，$S_{10}=10a=6\neq 9$ であるから，条件を満たさない。

よって　$r\neq 1$

$S_5=3$，$S_{10}=9$ であるから

$$\frac{a(r^5-1)}{r-1}=3 \ \cdots\cdots ①,\quad \frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=9 \ \cdots\cdots ②$$

②÷① から　$\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}\cdot\dfrac{r-1}{a(r^5-1)}=\dfrac{9}{3}$

よって　$r^5+1=3$　すなわち　$r^5=2$　……③

(1) $S_{15}=\dfrac{a(r^{15}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^5-1)}{r-1}\{(r^5)^2+r^5+1\}$

①，③ を代入して　$S_{15}=3\cdot(2^2+2+1)=21$

(2) $S_{20}=\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}\{(r^5)^2+1\}$

②，③ を代入して　$S_{20}=9\cdot(2^2+1)=45$

第 16 項から第 20 項までの和は $S_{20}-S_{15}$ であるから

$$S_{20}-S_{15}=45-21=24$$

5 年利 5 %， 1 年ごとの複利で，毎年度初めに 20 万円ずつ積み立てると，7 年度末には元利合計はいくらになるか。ただし，$(1.05)^7=1.4071$ とする。

解答 1709820 円

解説

毎年度初めの元金は，1 年ごとに利息がついて 1.05 倍となる。

よって，7 年度末の元利合計は

$$\begin{aligned}&200000\cdot(1.05)^7+200000\cdot(1.05)^6+\cdots\cdots+200000\cdot 1.05\\ &=200000\cdot\{1.05+(1.05)^2+(1.05)^3+\cdots\cdots+(1.05)^7\}\\ &=200000\cdot\frac{1.05\{(1.05)^7-1\}}{1.05-1}\\ &=200000\cdot\frac{1.05(1.4071-1)}{0.05}\\ &=200000\cdot 21\cdot 0.4071=1709820\ (\text{円})\end{aligned}$$

6 等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ において，公差と公比が同じ値 $d\ (\neq 0)$ をとる。初項に関しても同じ値 $a_1=b_1=a\ (>0)$ をとる。$a_3=b_3$，$a_9=b_5$ が成り立つとき，a，d の値を求めよ。

解答 $a=\sqrt{3}$，$d=\sqrt{3}$

解説

数列 $\{a_n\}$ は等差数列であるから　$a_n=a+(n-1)d$

数列 $\{b_n\}$ は等比数列であるから　$b_n=ad^{n-1}$

$a_3=b_3$ から　$a+2d=ad^2$　よって　$2d=a(d^2-1)$　……①

$a_9=b_5$ から　$a+8d=ad^4$　よって　$8d=a(d^4-1)$　……②

② を変形すると　$8d=a(d^2-1)(d^2+1)$　① を代入して　$8d=2d(d^2+1)$

ゆえに　$d(d^2-3)=0$

$d\neq 0$ であるから　$d^2=3$　よって　$d=\pm\sqrt{3}$

[1] $d=\sqrt{3}$ のとき，① から　$a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3-1}=\sqrt{3}$

これは $a>0$ を満たし，適する。

[2] $d=-\sqrt{3}$ のとき，① から　$a=\dfrac{-2\sqrt{3}}{3-1}=-\sqrt{3}$

これは $a>0$ を満たさず，不適。

したがって　$a=\sqrt{3}$，$d=\sqrt{3}$

$\boxed{7}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を $a_n=3n-1$，$b_n=2^n$ とする。数列 $\{b_n\}$ の項のうち，数列 $\{a_n\}$ の項でもあるものを小さい方から並べて数列 $\{c_n\}$ を作るとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$c_n=2^{2n-1}$

解説

$a_1=2$，$b_1=2$ であるから　$c_1=2$

数列 $\{a_n\}$ の第 l 項が数列 $\{b_n\}$ の第 m 項に等しいとすると

$$3l-1=2^m$$

ゆえに　$b_{m+1}=2^{m+1}=2^m\cdot 2=(3l-1)\cdot 2=3\cdot 2l-2$　…… ①

よって，b_{m+1} は数列 $\{a_n\}$ の項ではない。

① から　$b_{m+2}=2b_{m+1}=3\cdot 4l-4=3(4l-1)-1$

ゆえに，b_{m+2} は数列 $\{a_n\}$ の項である。

したがって　$\{c_n\}:b_1,\ b_3,\ b_5,\ \cdots\cdots$

数列 $\{c_n\}$ は公比 2^2 の等比数列で，$c_1=2$ であるから

$$c_n=2\cdot(2^2)^{n-1}=2^{2n-1}$$

$\boxed{8}$ 初項が 3，公比が 2 の等比数列を $\{a_n\}$ とする。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　$10^3<a_n<10^5$ を満たす n の値の範囲を求めよ。

(2)　初項から第 n 項までの和が 30000 を超える最小の n の値を求めよ。

解答　(1)　$10\leqq n\leqq 16$　　(2)　$n=14$

解説

(1)　初項が 3，公比が 2 の等比数列であるから　$a_n=3\cdot 2^{n-1}$

$10^3<a_n<10^5$ から　$10^3<3\cdot 2^{n-1}<10^5$

各辺の常用対数をとると　$\log_{10}10^3<\log_{10}3\cdot 2^{n-1}<\log_{10}10^5$

よって　$3<\log_{10}3+(n-1)\log_{10}2<5$

ゆえに　$1+\dfrac{3-\log_{10}3}{\log_{10}2}<n<1+\dfrac{5-\log_{10}3}{\log_{10}2}$

よって　$1+\dfrac{3-0.4771}{0.3010}<n<1+\dfrac{5-0.4771}{0.3010}$

すなわち　$9.38\cdots\cdots<n<16.02\cdots\cdots$

n は自然数であるから　$10\leqq n\leqq 16$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は　$\dfrac{3(2^n-1)}{2-1}=3(2^n-1)$

$3(2^n-1)>30000$ とすると　$2^n-1>10^4$　…… ①

ここで，$2^n>10^4$ について両辺の常用対数をとると　$n\log_{10}2>4$

よって　$n>\dfrac{4}{\log_{10}2}=\dfrac{4}{0.3010}=13.2\cdots\cdots$

ゆえに，$n\geqq 14$ のとき $2^n>10^4$ が成り立ち

$$2^{14}-1=(2^7+1)(2^7-1)=129\cdot 127=16383>10^4$$

2^n-1 は単調に増加するから，① を満たす最小の n の値は　$n=14$

$\boxed{9}$ 自然数 $2^a3^b5^c$（a，b，c は 0 以上の整数）の正の約数の総和を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{8}(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(5^{c+1}-1)$

解説

$2^a3^b5^c$ の正の約数は

$$(1+2+2^2+\cdots\cdots+2^a)(1+3+3^2+\cdots\cdots+3^b)(1+5+5^2+\cdots\cdots+5^c)$$

を展開したときに，すべて 1 回ずつ現れる。

したがって，求める和は

$$\frac{2^{a+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{b+1}-1}{3-1}\cdot\frac{5^{c+1}-1}{5-1}=\frac{1}{8}(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(5^{c+1}-1)$$